Ján Buša — Štefan Schrötter

1 KOMPLEXNÉ ČÍSLA[1]

1.1 Pojem komplexného čísla

Väčšine z nás je známe, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla nemôže byť záporná (ináč povedané: pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 \geqq 0$). Ako by sme mohli „pokaziť" túto základnú vlastnosť reálnych čísel? Dosiahneme to pomocou tzv. **imaginárnej jednotky** (označíme ju ako i – ide o čosi „nereálne", môžeme ju považovať za jedno z riešení kvadratickej rovnice $x^2+1=0$, ktorá má záporný diskriminant), pre ktorú platí

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

Táto definícia imaginárnej jednotky je založená na jej druhej mocnine:

$$i^2 = i \cdot i.$$

Rovnako je definovaná aj druhá mocnina ľubovoľnej reálnej premennej. Tu ale i nie je premenná, ale symbol s „nereálnou vlastnosťou" $i^2 = -1$! Aj vyššie mocniny imaginárnej jednotky definujeme tak ako mocniny reálnej premennej, t. j.

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1.$$

Podobne $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$. Potom $i^6 = -1$, $i^7 = -i$ a $i^8 = 1$. Ľahko zistíme, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$i^{n+4} = i^n. \tag{2}$$

Zrejme $i^1 = i$ a $i^0 = 1$. Potom z rovnosti (2) dostaneme: pre každé prirodzené číslo n je

$$i^n = i^r, \tag{3}$$

kde r je zvyšok pri delení čísla n číslom 4 ($r \in \{0, 1, 2, 3\}$). Napríklad pre $n = 2010$ je $r = 2$, a teda

$$i^{2010} = i^2 = -1.$$

Teraz môžeme definovať množinu komplexných čísel:

Definícia 1.1 *Nech i je imaginárna jednotka. Potom každá usporiadaná dvojica (a, b) reálnych čísel a a b definuje (určuje) práve jedno komplexné číslo tvaru $a+bi$. Tomuto zápisu hovoríme* **algebrický tvar komplexného čísla**.[2] *Množina všetkých komplexných čísel sa zvykne označovať písmenom $\mathbb{C}$.*

---

[1] Komplexné čísla sa na mnohých stredných školách vynechali z učebných osnov. Pre štúdium na našej fakulte sú ale potrebné. Preto výklad je robený podrobnejšie ako v iných častiach tejto učebnej pomôcky. Komplexné čísla nie sú obsiahnuté v úlohách na prípadných prijímačkách na fakultu.

[2] V literatúre sa často používa rovnocenný tvar $a + ib$.

Napríklad dvojica $(2, -5)$ definuje komplexné číslo $2+(-5)i$, ktoré budeme zapisovať takto: $2 - 5i$. Tu sú ďalšie príklady:

$$(-7, \sqrt[5]{3}) \longrightarrow -7 + \sqrt[5]{3}i;$$

$$(0, -6) \longrightarrow 0 + (-6)i, \text{ resp. } -6i;$$

$$(5, 0) \longrightarrow 5 + 0i, \text{ resp. } 5.$$

Definícia 1.2 *Nech $a + bi$ je komplexné číslo, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom reálne číslo a nazývame* **reálnou časťou** *a reálne číslo b* **imaginárnou časťou komplexného čísla**. *Bežne sa používa toto označenie:*

$$a = \Re e(a+bi) \qquad \text{a} \qquad b = \Im m(a+bi).$$

Napríklad $\Re e(-3+\sqrt{3}i) = -3$ a $\Im m(-3+\sqrt{3}i) = \sqrt{3}$ alebo $\Re e(6) = 6$ a $\Im m(6) = 0$ a tiež $\Re e(-9i) = 0$ a $\Im m(-9i) = -9$.

Definícia 1.3 (Rovnosť komplexných čísel) *Dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a aj imaginárne časti, t. j. pre $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ je*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2)\,.$$

Nech $x \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné reálne číslo. Potom platí: $x = x + 0i$, pričom $x + 0i$ je komplexné číslo (jeho imaginárna časť je rovná nule). Teda každé reálne číslo je aj komplexným číslom, a preto

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.2 Gaussova rovina a goniometrický tvar komplexného čísla

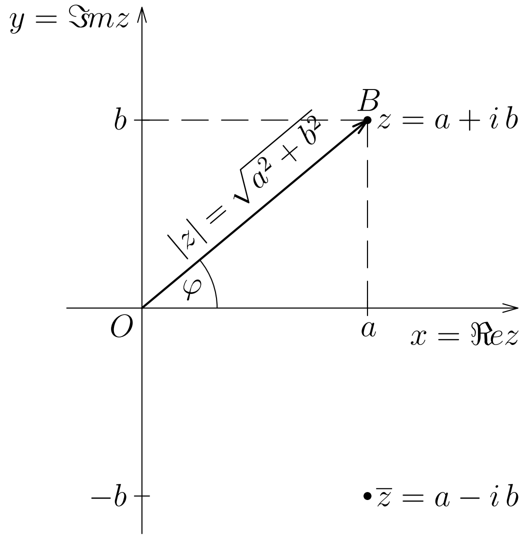
Vieme, že každému komplexnému číslu $z = a + bi$ v algebrickom tvare zodpovedá práve jedna usporiadaná dvojica (a, b) reálnych čísel (priradenie je vzájomne jednoznačné):

$$a + ib \longleftrightarrow (a, b).$$

Zvoľmu v rovine bežnú pravouhlú súradnicovú sústavu a v nej bod $B = (a, b)$. Jeho prvá súradnica sa rovná reálnej časti a druhá súradnica imaginárnej časti komplexného čísla z (pozri obr. 1). Toto priradenie je vzájomne jednoznačné, lebo ku každému bodu roviny existuje jediné komplexné číslo, ktoré je „vzorom“ tohto bodu pri danom priradení.

Bodom osi x je priradená usporiadaná dvojica $(x, 0)$, ktorej zodpovedá číslo $x+0i = x$, kde $x \in \mathbb{R}$. To ale znamená, že body osi x reprezentujú reálne čísla. Podobnou úvahou dostaneme, že body osi y znázorňujú čísla typu $0+yi = yi$, kde $y \in \mathbb{R}$. To sú komplexné čísla s nulovou reálnou časťou – hovoríme im **rýdzo imaginárne**. Rovine, v ktorej sú uvedeným spôsobom znázorňované komplexné čísla, hovoríme **Gaussova rovina**, osi x hovoríme **reálna os** a osi y **imaginárna os** (označujeme ich tiež $\Re ez$, resp. $\Im mz$).

Často je výhodné poznať pojem „komplexne združené číslo“.



Obr. 1: Gaussova rovina

Definícia 1.4 Komplexne združeným číslom *k číslu* $a + bi$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*, nazývame číslo* $a - bi$*. Zapisujeme to takto*

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Komplexné číslo a k nemu komplexne združené číslo majú „imaginárne časti s opačnými znamienkami“, ich reálne časti sú rovnaké (obr. 1). Napríklad:

$$\overline{-2 - \sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i, \qquad \overline{3i} = -3i \qquad \text{a} \qquad \overline{-6} = -6.$$

Ak x je reálne číslo, tak $\overline{x} = x$. Je zrejmé, že pre každé komplexné číslo z platí:

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Definícia 1.5 (Absolútna hodnota komplexného čísla) Pod absolútnou hodnotou*, resp.* **modulom komplexného čísla** $a + bi$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*, rozumieme nezáporné reálne číslo* $\sqrt{a^2 + b^2}$*. Zapisujeme to takto:*

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

(teda používame $|\cdot|$ *– rovnako ako pre absolútnu hodnotu reálneho čísla).*

Napríklad $|5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$, $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, $|-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$ a $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$. Pri určovaní absolútnej hodnoty komplexného čísla sa často robí takáto chyba:

$$|5 - 3i| = \underbrace{\sqrt{5^2 + (-3i)^2}}_{\text{chyba!}} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Správne má byť $(-3)^2$ a nie $(-3i)^2$. Ešte raz zdôrazňujeme, že absolútna hodnota komplexného čísla z je definovaná takto:

$$|z| = \sqrt{\left(\Re e\, z\right)^2 + \left(\Im m\, z\right)^2}.$$

Všimnime si, že pre $x \in \mathbb{R}$ je $|x|_{\mathbb{C}} = |x + 0i|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|_{\mathbb{R}}$ (tu $\mathbb{C}$ v indexe označuje výpočet absolútnej hodnoty v množine komplexných čísel a $\mathbb{R}$ v množine reálnych čísel.) Pre reálne x sme dostali rovnaké výsledky!

Pre absolútnu hodnotu komplexného čísla platia niektoré pravidlá, ktoré sú zhodné s pravidlami pre absolútnou hodnotu reálneho čísla, napr. $|z_1| \geqq 0$ (ďalšie sú uvedené vo vete 1.2). **Ale pozor! Nerovnosti majú zmysel len vtedy, keď ľavá aj pravá strana nerovnosti nadobúda reálne hodnoty**. Napríklad známa nerovnosť $x \leqq |x|$ z oboru reálnych čísel nemá zmysel v množine komplexných čísel. Súvisí to s tým, že na množine všetkých komplexných čísel sa nedá zaviesť nerovnosť (t. j. $<$, $>$, $\leqq$ alebo $\geqq$) tak, aby mala všetky vlastnosti, ktoré má nerovnosť na množine reálnych čísel.

Niektoré vlastnosti Gaussovej roviny:

- body Gaussovej roviny, ktoré znázorňujú dve navzájom komplexne združené čísla, sú súmerné podľa reálnej osi (obr. 1);

- absolútna hodnota komplexného čísla z sa rovná dĺžke úsečky $\overleftrightarrow{OB}$, ktorej koncové body sú začiatok súradnicovej sústavy a bod B znázorňujúci komplexné číslo z (obr. 1);

- na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomerom r „ležia“ všetky komplexné čísla, ktorých absolútna hodnota je rovná r.

Všimnime si, že každé nenulové komplexné číslo z jednoznačne určuje úsečku $\overleftrightarrow{OB}$ (dĺžka tejto úsečky je $|z|$), ktorá zviera s kladnou časťou reálnej osi uhol veľkosti $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ (veľkosť uhla sa berie v smere proti pohybu hodinových ručičiek). Číslo φ nazývame **argumentom** (niekedy aj **amplitúdou**) **komplexného čísla** z. Je zrejmé, že ak φ je argumentom komplexného čísla z, tak aj všetky čísla typu $\varphi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, sú jeho argumentom. V praxi sa používa aj φ z intervalu $(-\pi; \pi\rangle$. Argument φ dostaneme vyriešením tejto sústavy rovníc (pozri obr. 1):

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}. \tag{5}$$

Odtiaľ máme $a = |z|\cos\varphi$ a $b = |z|\sin\varphi$. Potom pre každé nenulové komplexné číslo $z = a + bi$ dostávame:

$$z = a + bi = (|z|\cos\varphi) + (|z|\sin\varphi)i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Zápisu $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hovoríme **goniometrický tvar komplexného čísla** z. Je jednoznačne daný absolútnou hodnotou

$$|z| = \sqrt{\left(\Re e\, z\right)^2 + \left(\Im m\, z\right)^2}$$

a argumentom φ, ktorý je riešením sústavy (5) – samotný sínus alebo kosínus neurčujú uhol φ jednoznačne.

Poznámka 1.1 *Pri praktickom prepise komplexného čísla z tvaru algebrického $z = a + bi$ na tvar goniometrický mnohých odrádza správne vyriešenie sústavy (5). V takom prípade odporúčame znázorniť si komplexné číslo v Gaussovej rovine: argument φ môžeme získať priamo zo znázornenia (vyskúšajte si to napr. na číslach $6i$, -6, $-6i$, 6, $6+6i$, $-6+6i$, $-6-6i$ a $6-6i$) alebo použijeme funkciu tangens. V prvom a štvrtom kvadrante je sústava (5) ekvivalentná s rovnicou*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Ale vo zvyšných dvoch kvadrantoch riešenie rovnice (6) nie je požadovaným argumentom φ – skúste porozmýšľať nad tým, ako súvisí riešenie uvažovanej rovnice (6) so správnou hodnotou φ. Ak sa vám to nepodarí, tak si pozrite riešené príklady.

Príklad 1.1 *Zapíšme dané komplexné čísla v goniometrickom tvare:* a) $3i$; b) $-1 - i$; c) -4; d) $-1 + \sqrt{3}i$; e) 3; f) $\sqrt{12} - 2i$.

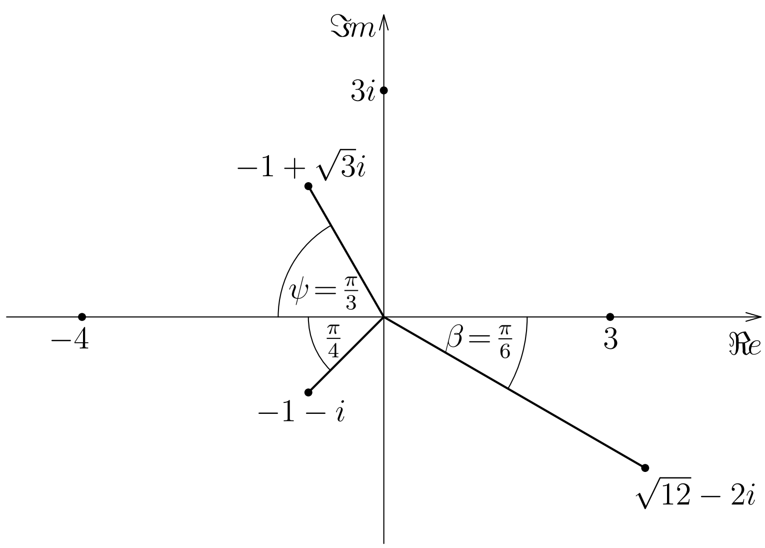
Riešenie. a) Zrejme $|3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ a sústava (5) má tvar

$$\cos \varphi = \frac{0}{3} \qquad \text{a} \qquad \sin \varphi = \frac{3}{3} = 1.$$

Jej riešením je množina $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za argument čísla $3i$ zvolíme hodnotu $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Potom

$$3i = 3(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \sin \tfrac{\pi}{2}).$$

Pozrite si obr. 2: zo znázornenia čísla $3i$ v Gaussovej rovine priamo vidno, že $|3i| = 3$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Obr. 2: Komplexné čísla z príkladu 1.1 zo strany 5 v Gaussovej rovine

b) Tentoraz $|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Komplexné číslo $-1 - i$ leží v Gaussovej rovine (obr.2) na osi tretieho kvadrantu. Odtiaľ ľahko vidno, že

$\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (pripomíname, že φ je veľkosť uhla, ktorý zviera kladná časť reálnej osi s úsečkou, ktorej koncové body sú začiatok súradnicového systému a bod znázorňujúci číslo $-1-i$). Potom

$$-1-i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}).$$

Poznamenávame, že za argument komplexného čísla $-1-i$ sme mohli zvoliť hodnotu $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ (premyslite si to).

c) Číslo -4 leží v Gaussovej rovine na zápornej časti reálnej osi (pozri obr. 2). To znamená, že $\varphi = \pi$ a keďže $|-4| = 4$, tak

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

d) Máme $|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Argument φ získame vyriešením sústavy rovníc (5), ktorá má tvar

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(skúste ju vyriešiť). Komplexné číslo $-1+\sqrt{3}i$ leží v druhom kvadrante Gaussovej roviny (obr. 2). Uvažujme uhol ψ: preň platí $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Odtiaľ $\psi = \frac{\pi}{3}$ a teda $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Potom

$$-1+\sqrt{3}i = 2(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}).$$

e) Pre číslo 3 je situácia jednoduchá (pozri obr.2): $|3| = 3$ a $\varphi = 0$. Takto

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

f) Najprv určíme absolútnu hodnotu $|\sqrt{12} - 2i| = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = 4$. Sústava rovníc (5) má tvar

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ak nemáte istotu v jej vyriešení, tak sa pozrite na znázornenie komplexného čísla $\sqrt{12} - 2i$ v Gaussovej rovine (obr.2). Leží vo štvrtom kvadrante a pre vyznačený uhol β platí: $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Odtiaľ $\beta = \frac{\pi}{6}$. Potom pre argument φ je $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Teda

$$\sqrt{12} - 2i = 4(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6}).$$

Tu sme namiesto argumentu $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ mohli použiť argument $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (podobne ako v príklade b)) s týmto výsledkom:

$$\sqrt{12} - 2i = 4(\cos\tfrac{-\pi}{6} + i\sin\tfrac{-\pi}{6}).$$

Poznámka 1.2 *Premyslite si tieto špeciálne prípady goniometrických tvarov:*

- *ak a je kladné reálne číslo, tak* $a = a(\cos 0 + i \sin 0)$;
- *ak a je záporné reálne číslo, tak* $a = -a(\cos \pi + i \sin \pi)$;
- *ak b je kladné reálne číslo, tak* $bi = b(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$;
- *ak b je záporné reálne číslo, tak* $bi = -b(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$.

(prvé dva prípady sa vzťahujú na nenulové reálne čísla a posledné dva prípady na rýdzo imaginárne čísla).

Poznámka 1.3 *Uvádzame dva postrehy:*
1. Prechod od goniometrického tvaru komplexného čísla na algebrický je jednoduchý: vyčíslime hodnoty $\cos \varphi$ *a* $\sin \varphi$ *a upravíme číslo* $|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. *Napríklad*

$$6(\cos \tfrac{3\pi}{4} + i \sin \tfrac{3\pi}{4}) = 6(\tfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i.$$

2. Zápisy $7(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$ *a* $(1-\sqrt{3})(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$ *sú isté komplexné čísla (vyjadrite ich v algebrickom tvare!), ale nie sú v goniometrickom tvare (viete to zdôvodniť?).*

1.3 Operácie s komplexnými číslami

Súčet, rozdiel a súčin dvoch komplexných čísel získame jednoduchým spôsobom: s obidvoma číslami „narábame“ ako s výrazom, ktorý obsahuje imaginárnu jednotku i. Pri súčine využijeme základnú vlastnosť imaginárnej jednotky: $i^2 = -1$.

Napríklad, ak $z_1 = -3 + 5i$ a $z_2 = 2 - 8i$, tak

$$z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (2 - 8i) = (-3 + 2) + [5 + (-8)]i = -1 + (-3)i;$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (2 - 8i) = (-3 - 2) + [5 - (-8)]i = -5 + 13i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3+5i)\cdot(2-8i) = -6+24i+10i-40i^2 = \Big[-6-40\cdot(-1)\Big]+\Big[24+10\Big]i =$$

$$= 34 + 34i.$$

Všimnime si, že cieľom uvedených úprav je získanie výsledného komplexného čísla v algebrickom tvare $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Odtiaľ ľahko určíme jeho reálnu a imaginárnu časť.

S podielom je to trochu zložitejšie. Ak delíme nenulovým reálnym číslom, tak reálnu a imaginárnu časť výsledku ľahko dostaneme „roztrhnutím zlomku“:

$$\frac{3 - 5i}{8} = \frac{3}{8} - \frac{5}{8}i.$$

Reálna časť výsledku je $\frac{3}{8}$ a imaginárna časť je $-\frac{5}{8}$.
Ak menovateľ má nenulovú imaginárnu časť, tak zlomok vynásobíme zlomkom $\frac{\text{komplexne združený menovateľ}}{\text{komplexne združený menovateľ}} = 1$, ktorý je rovný jednej – pozri rovnosť a):

$$\frac{-2+11i}{-3+4i} \overset{a)}{=} \frac{(-2+11i)}{(-3+4i)} \cdot \underbrace{\frac{(-3-4i)}{(-3-4i)}}_{=1} \overset{b)}{=}$$

Teraz úpravou b) „vynásobíme“ získané dva zlomky – čitateľ čitateľom a menovateľ menovateľom. Úpravou c) zjednodušíme čitateľa a menovateľa. Dostaneme zlomok, ktorého menovateľ je reálne číslo – tu reálnu a imaginárnu časť dostaneme „roztrhnutím“ zlomku:

$$\overset{b)}{=} \frac{6+8i-33i-44i^2}{9-16i^2} \overset{c)}{=} \frac{(6+44)+(8-33)i}{9-16\cdot(-1)} = \frac{50-25i}{25} = 2-i.$$

Uvedené príklady môžeme zovšeobecniť:

Veta 1.1 *Ak $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$ sú komplexné čísla v algebrickom tvare, tak:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\Re e} + \underbrace{(a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{\Im m} i;$$

$$\textit{pre } z_2 \neq 0: \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\Re e} + \underbrace{\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\Im m} i.$$

Nesnažte sa tieto vzorce zapamätať; pri uvedených operáciách odporúčame postupovať podľa predchádzajúcich príkladov. Radšej si zapamätajte tieto skutočnosti:

1. Ľahko sa dá dokázať, že operácie sčitovania a násobenia komplexných čísel spĺňajú komutatívny, asociatívny a distributívny zákon.

2. V množine komplexných čísel (tak isto ako v množine reálnych čísel) je jediným neutrálnym prvkom vzhľadom na

   - sčitovanie číslo 0 (t. j. pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ platí: $z + 0 = 0 + z = z$)
   - násobenie číslo 1 (t. j. pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ platí: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$).

3. Pomocou operácií násobenia a delenia definujeme (obdobným spôsobom ako v množine reálnych čísel) celočíselnú mocninu komplexného čísla z^n.

Zamyslime sa nad tým, ako sa správajú vyššie definované operácie v súvislosti s pojmom komplexne združené číslo. Overte si, že pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$z + \overline{z} = 2\cdot\Re e z, \qquad z - \overline{z} = 2\cdot\Im m z\cdot i, \quad \text{a} \quad z \cdot \overline{z} = \left(\Re e z\right)^2 + \left(\Im m z\right)^2.$$

Ďalej, ak z_1 a z_2 sú komplexné čísla, tak

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \text{a pre } z_2 \neq 0 \text{ je } \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

V súvislosti s absolútnou hodnotou je teda

$$z \cdot \overline{z} = \Big(\Re e\, z\Big)^2 + \Big(\Im m\, z\Big)^2 = |z|^2.$$

Ďalej platí:

Veta 1.2 *Ak z_1 a z_2 sú komplexné čísla, tak*

$$\text{a) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad \text{b) } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \textit{pre} \quad z_2 \neq 0;$$

$$\text{c) } |z_1| - |z_2| \leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \qquad \textit{(trojuholníková nerovnosť).}$$

Možno ste si položili otázku: načo je dobrý goniometrický tvar komplexného čísla? Nestačí algebrický tvar? Goniometrický tvar neraz poskytuje jednoduchú interpretáciu úloh v rôznych vedných disciplínach. My si ukážeme, že pravidlá pre výpočet súčinu, podielu a celočíselných mocnín komplexných čísel v goniometrickom tvare sú oveľa jednoduchšie ako v tvare algebrickom. Napokon goniometrický tvar nám umožní prostou úvahou získať hodnoty n-tej odmocniny komplexného čísla.

Veta 1.3 *Ak $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sú dve nenulové komplexné čísla, tak*

$$z_1 \cdot z_2 = \Big(|z_1| \cdot |z_2|\Big)\Big[\cos(\varphi_1+\varphi_2) \;+\; i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big] \tag{7}$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]. \tag{8}$$

Je zrejmé, že pravé strany rovností (7) a (8) sú komplexné čísla v goniometrickom tvare. Podľa (7) dve komplexné čísla v goniometrickom tvare vynásobíme tak, že vynásobíme ich absolútne hodnoty a ich argumenty sčítame. Pri delení absolútne hodnoty vydelíme a od argumentu delenca odčítame argument deliteľa.

Poznámka 1.4 *Premyslite si geometrické interpretácie rovností (7) a (8) v Gaussovej rovine, t. j. ako zo znázornenia komplexných čísel z_1 a z_2 dostaneme obrazy čísel $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$?*

Príklad 1.2 *Nech $z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ a $z_2 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Určme reálnu a imaginárnu časť komplexných čísel:* a) $z_1 \cdot z_2$; b) $z_1 : z_2$; c) $z_2 : z_1$.

Riešenie. Čísla z_1 a z_2 sú zapísané v goniometrickom tvare (číslo z_2 má správny tvar $z_2 = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, ale v takomto prípade sa z pochopiteľných dôvodov nevyžaduje zápis čísla 1).
a) Na základe (7) je

$$z_1 \cdot z_2 = \Big(2 \cdot 1\Big)\Big[\cos\big(\tfrac{7\pi}{6} + \tfrac{\pi}{3}\big) \;+\; i\sin\big(\tfrac{7\pi}{6} + \tfrac{\pi}{3}\big)\Big] = 2(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -2i.$$

Odtiaľ

$$\Re e(z_1 \cdot z_2) = 0 \qquad \text{a} \qquad \Im m(z_1 \cdot z_2) = -2.$$

b) Podľa (8) je

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\tfrac{2}{1}\right)\left[\cos(\tfrac{7\pi}{6} - \tfrac{\pi}{3}) \ + \ i \sin(\tfrac{7\pi}{6} - \tfrac{\pi}{3})\right] = 2(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i \sin\tfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i.$$

Teda

$$\Re e\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad \Im m\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 1.$$

c) Vzhľadom na (8) je

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\cos(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{7\pi}{6}) \ + \ i \sin(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{7\pi}{6})\right] = \left(\tfrac{1}{2}\right)(\cos\tfrac{-5\pi}{6} + i \sin\tfrac{-5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3} - i}{4}.$$

Teda

$$\Re e\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{a} \qquad \Im m\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Ak $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, tak na základe (7) dostaneme

$$z \cdot z = z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi). \tag{9}$$

Rovnosť (9) môžeme matematickou indukciou zovšeobecniť:

Veta 1.4 *Ak $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ je nenulové komplexné číslo, tak pre každé prirodzené číslo n platí*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{10}$$

Rovnosť (10) nazývame **Moivreov vzorec**.

Umocnenie komplexného čísla podľa Moivreovho vzorca spočíva v umocnení jeho absolútnej hodnoty a n-násobnom zväčšení jeho argumentu.

Je užitočné si uvedomiť, že Moivreov vzorec má v prípade $|z| = 1$ tvar

$$z^n = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \tag{11}$$

Všimnite si, že čísla $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$ a $\cos n\varphi + i \sin n\varphi$ z rovnosti (11) ležia v Gaussovej rovine na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy, ktorej polomer je 1.

Príklad 1.3 *Určme reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla*

$$z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^{17}(i - 1)^7}{(2 + 2i)^{13}}. \tag{12}$$

Riešenie. Sedemnástu, siedmu a trinástu mocninu by sme mohli vyčísliť pomocou binomického rozvoja – to by si vyžadovalo hodne trpezlivosti a pravdepodobne by sme sa v úpravách aj pomýlili. Oveľa jednoduchšie to pôjde pomocou Moivreovho vzorca. Ten si vyžaduje základy mocnín v goniometrickom tvare. Presvedčte sa, že (pomôžte si Gaussovou rovinou): $1-\sqrt{3}i = 2(\cos 300° + i\sin 300°)$, $i-1=\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$ a $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$ – tentoraz sme použili stupne. Podľa Moivreovho vzorca je:

$$(1-\sqrt{3}i)^{17} = [2(\cos 300° + i\sin 300°)]^{17} = 2^{17}\,[\cos(17\cdot 300°) + i\sin(17\cdot 300°)]\,,$$

$$(i-1)^7 = [\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)]^7 = (\sqrt{2})^7\,[\cos(7\cdot 135°) + i\sin(7\cdot 135°)]$$

a

$$(2+2i)^{13} = \left[2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)\right]^{13} = (2\sqrt{2})^{13}\,[\cos(13\cdot 45°) + i\sin(13\cdot 45°)]\,.$$

Keďže $17\cdot 300 = 5100$, $7\cdot 135 = 945$ a $13\cdot 45 = 585$, tak dané komplexné číslo (12) môžeme zapísať takto:

$$z = \frac{\overbrace{2^{17}\,[\cos 5100° + i\sin 5100°]}^{(1-\sqrt{3}i)^{17}}\cdot\overbrace{(\sqrt{2})^7\,[\cos 945° + i\sin 945°]}^{(i-1)^7}}{\underbrace{(2\sqrt{2})^{13}\,[\cos 585° + i\sin 585°]}_{(2+2i)^{13}}} = (*)$$

Teraz môžeme použiť pravidlo (7) pre súčin a pravidlo (8) pre podiel komplexných čísel v goniometrickom tvare. Vzhľadom na to, že

$$\frac{2^{17}\cdot(\sqrt{2})^7}{(2\sqrt{2})^{13}} = 2 \qquad \text{a} \qquad 5100° + 945° - 585° = 5460°$$

môžeme písať

$$(*) = 2(\cos 5460° + i\sin 5460°) \overset{a)}{=} 2(\cos 60° + i\sin 60°).$$

Tu sme v rovnosti $a)$ využili periodicitu funkcií cos a sin: $5460 - 15\cdot 360 = 60$. Pri počítaní v radiánoch by sme mali $17\cdot\frac{5\pi}{3} + 7\cdot\frac{3\pi}{4} - 13\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{364}{12}\pi = 15\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$. Vieme, že $\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a preto

$$z = 2(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}i.$$

Teda $\Re e\, z = 1$ a $\Im m\, z = \sqrt{3}$.

Nasledujúci príklad je peknou ukážkou použitia Moivreovho vzorca a utvrdzuje poznatky o rovnosti komplexných čísel (je súčasťou nejednej učebnej pomôcky o komplexných číslach):

Príklad 1.4 *Vyjadrime výrazy* $\cos 2\varphi$ *a* $\sin 2\varphi$ *pomocou výrazov* $\cos\varphi$ *a* $\sin\varphi$.

Riešenie. Pre $n = 2$ má Moivreov vzorec (11) tvar

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \underbrace{\cos 2\varphi}_{\Re e} + i\underbrace{\sin 2\varphi}_{\Im m} \tag{13}$$

Ak v dobre známom vzorci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ položíme $a = \cos\varphi$ a $b = i\sin\varphi$, tak dostaneme

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 &= \cos^2\varphi + 2(\cos\varphi)\cdot(i\sin\varphi) + (i\sin\varphi)^2 = \\ &= \underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{\Re e} + i\underbrace{2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}_{\Im m}\end{aligned} \tag{14}$$

Vieme, že dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti, a preto porovnaním reálnych častí vzťahov (13) a (14) dostaneme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

a porovnaním imaginárnych častí máme

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

A to sú známe vzorce z goniometrie.

1.4 Odmocnina komplexného čísla

Nech n je prirodzené číslo, $n \geqq 2$ a z je komplexné číslo. Každé komplexné číslo w, pre ktoré platí

$$w^n = z \tag{15}$$

nazývame ***n*-tou odmocninou komplexného čísla** z. Označujeme ho zápisom $w = \sqrt[n]{z}$ (pre $n = 2$ zápisom $\sqrt{z}$). Teda komplexné číslo w je n-tou odmocninou čísla z práve vtedy, keď je koreňom rovnice (15).

Pre $z = 0$ je situácia jednoduchá: rovnica $w^n = 0$ má jediný (n-násobný) koreň, a to $w = 0$. Preto $\sqrt[n]{0} = 0$.

Poznámka 1.5 *Postavme si otázku: ako súvisí uvedená definícia n-tej odmocniny komplexného čísla z so známou tzv. „aritmetickou odmocninou nezáporného reálneho čísla“?* **Aritmetická odmocnina nadobúda jedinú nezápornú hodnotu** *– napr.* $\sqrt{9} = 3$. *Rovnica (15) má v našom prípade tvar*

$$w^2 = 9,$$

ktorá má dva korene: 3 *a* -3. *To znamená, že druhou odmocninou komplexného čísla* 9 *je, okrem čísla* 3, *aj číslo* -3. *Všimnime si, že napr. druhou odmocninou komplexného čísla* 2 *je* $\sqrt{2}$, *ale aj číslo* $-\sqrt{2}$.

Ucelenú informáciu o n-tej odmocnine komplexného čísla poskytuje táto veta:

Veta 1.5 *Nech* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *je ľubovoľné nenulové komplexné číslo. Potom n-tá odmocnina čísla z určuje n navzájom rôznych komplexných čísel, ktoré dostaneme takto:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\Big), \tag{16}$$

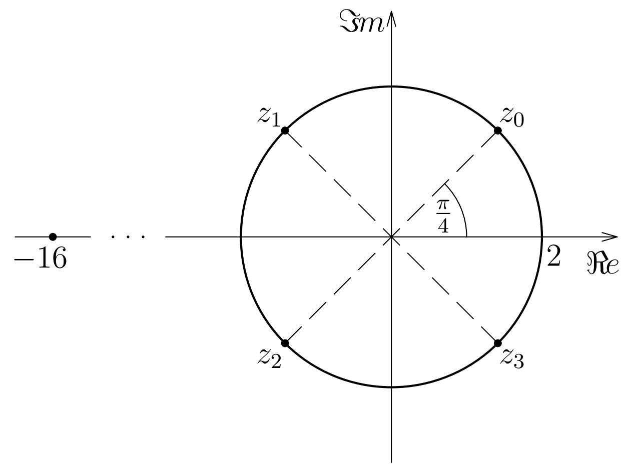
kde za k dosadzujeme postupne čísla $0, 1, \ldots, n-1$.

Všimnime si, že na určenie hodnôt $\sqrt[n]{z}$ veta 1.5 požaduje zápis čísla z v goniometrickom tvare a aj samotné hodnoty $\sqrt[n]{z}$ sú vo vzťahu (16) uvedené v goniometrickom tvare.

Príklad 1.5 *Vypočítajme všetky hodnoty* $\sqrt[4]{-16}$.

Riešenie. Podľa vety (1.5) musíme najprv vyjadriť číslo -16 v goniometrickom tvare. Ak sa pozrieme na jeho znázornenie v Gaussovej rovine na obr. 3, tak ľahko zistíme, že

$$-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$



Obr. 3: Znázornenie hodnôt $\sqrt[4]{-16}$ v Gaussovej rovine

Na základe (16) dostaneme ($n = 4$, $\sqrt[4]{|-16|} = 2$ a $\varphi = \pi$):

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\Big(\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{4}\Big), \quad \text{kde} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Keďže $\sqrt[4]{16} = 2$, tak pre jednotlivé hodnoty k dostaneme

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = z_0 \quad \text{pre} \quad k = 0, \\ 2\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big) = z_1 \quad \text{pre} \quad k = 1, \\ 2\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\Big) = z_2 \quad \text{pre} \quad k = 2, \\ 2\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\Big) = z_3 \quad \text{pre} \quad k = 3. \end{cases} \tag{17}$$

Dostali sme požadované štyri hodnoty $\sqrt[4]{-16}$, a to v goniometrickom tvare. Použili sme pre ne označenie z_0, z_1, z_2 a z_3 v závislosti od toho, aké k sme pri ich vyčíslení použili (napr. pre $k = 2$ označenie z_2). Na obr. 3 sú tieto čísla (a aj číslo -16) znázornené v Gaussovej rovine: všetky štyri hodnoty z_k ležia na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomerom 2. Komplexné číslo z_0 (pozri (17)) má argument $\frac{\varphi}{n} = \frac{\pi}{4}$. Rozdiel argumentov ľubovoľných dvoch „na kružnici susedných bodov“ bodov je $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Overte, že pre algebrické tvary čísel z_k platí: $z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ a $z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Teraz uvedieme niektoré užitočné poznatky (ich podstata bola naznačená pri riešení príkladu 1.5):

1. Vo vzorci (16) vystupuje aritmetická odmocnina $\sqrt[n]{|z|}$ – t. j. odmocnina kladného reálneho čísla, ktorá nadobúda jedinú kladnú hodnotu.

2. **Vzorec (16) nám poskytuje $\boldsymbol{n}$ rôznych hodnôt $\sqrt[n]{z}$ v goniometrickom tvare**. Všetky majú rovnakú absolútnu hodnotu, konkrétne $\sqrt[n]{|z|}$. Preto ležia v Gaussovej rovine na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomerom $\sqrt[n]{|z|}$ (na obr. 4 sú znázornené hodnoty šiestej odmocniny čísla z). Argument čísla z_0 je $\frac{\varphi}{n}$ (pozri dohodu o označení z_k v riešení príkladu 1.5).

   Zo vzorca (16) vyplýva, že čísla z_1, z_2, …,z_{n-1} vytvárajú na spomínanej kružnici pravidelný n-uholník. Ľahko ho získame tak, že otočíme bod z_0 okolo začiatku súradnicovej sústavy v smere proti pohybu hodinových ručičiek o uhol veľkosti $\frac{2\pi}{n}$ – tým dostaneme bod z_1. Ak rovnakým spôsobom otočíme bod z_1, tak dostaneme bod z_2, potom z bodu z_2 bod z_3, atď. Otáčanie opakujeme dovtedy, kým nezískame bod z_{n-1}. Body z_k sme stále otáčali o uhol veľkosti $\frac{2\pi}{n}$. Keby sme otočili aj bod z_{n-1}, tak dostaneme bod z_0, teda bod, ktorý sme už mali. Ďalšie otáčania nám nedajú nové body. Týmto postupom sme znázornili v Gaussovej rovine všetkých n hodnôt $\sqrt[n]{z}$ (na obr. 4 sú znázornené hodnoty $\sqrt[6]{z}$: sú to body z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 a z_5).

3. Ak $|z| > 1$, tak aj aritmetická odmocnina $\sqrt[n]{|z|}$ je väčšia ako jedna a body z_k sú „bližšie“ k začiatku súradnicovej sústavy ako bod z – tak ako na obr. 4. Ak $|z| < 1$, tak situácia je opačná (pozri obr. 5). Napokon, ak $|z| = 1$, tak bod z, ako aj body z_k, ležia na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomerom jedna.

Uvedieme ešte jeden jednoduchý príklad:

Príklad 1.6 *Vypočítajme všetky hodnoty $\sqrt[3]{-i}$.*

Riešenie. Presvedčte sa, že

$$-i = 1(\cos 270° + i \sin 270°)$$

(opäť sme použili stupne). Teda $n = 3$, $|z| = 1$ a $\varphi = 270°$. Podľa vety 1.5 dostaneme:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \tfrac{270°+0\cdot 360°}{3} + i \sin \tfrac{270°+0\cdot 360°}{3}\right) = \cos 90° + i \sin 90° = i;$$

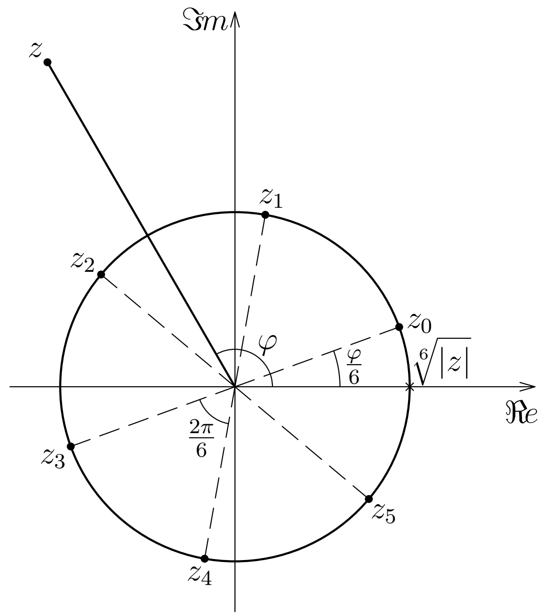
$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \tfrac{270°+1\cdot 360°}{3} + i \sin \tfrac{270°+1\cdot 360°}{3}\right) = \cos 210° + i \sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

a

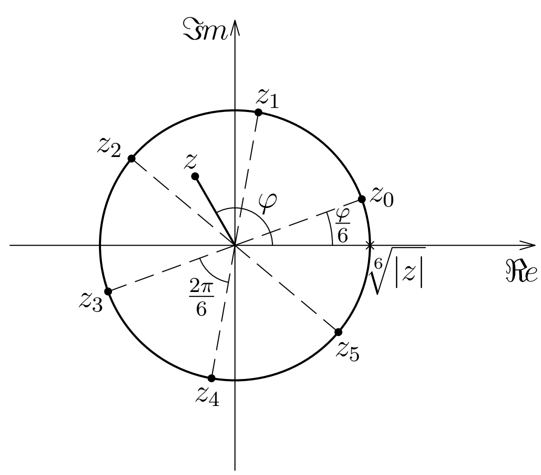
$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \tfrac{270°+2\cdot 360°}{3} + i \sin \tfrac{270°+2\cdot 360°}{3}\right) = \cos 330° + i \sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Skúste si interpretovať tieto výpočty v Gaussovej rovine! Tentoraz urobíme aj „skúšku správnosti“: k tomu je potrebné overiť, čí vyčíslené hodnoty z_0, z_1 a z_2 sú koreňmi rovnice

$$z^3 = -i.$$



Obr. 4: Znázornenie hodnôt $\sqrt[6]{|z|}$ v Gaussovej rovine (pre prípad $|z| > 1$)



Obr. 5: Znázornenie hodnôt $\sqrt[6]{|z|}$ v Gaussovej rovine (pre prípad $|z| < 1$)

Číslo $z_0 = i$ je koreňom tejto rovnice, lebo $i^3 = -i$. Rovnaký záver dostaneme aj pre z_1 a z_2 – presvedčte sa o tom!

K výpočtu hodnôt $\sqrt[n]{z}$ je potrebné poznať argument φ komplexného čísla z. Nasledujúcim príkladom ukážeme, že pri druhej odmocnine môžeme tento problém obísť.

Príklad 1.7 *Vypočítajme všetky hodnoty* $\sqrt{5-12i}$.

Riešenie. Nech

$$\sqrt{5-12i} = x + yi, \quad \text{kde} \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{18}$$

t. j. predpokladáme, že máme hodnoty $\sqrt{5-12i}$ vyjadrené v algebrickom tvare. Umocnime obe strany rovnice (18) na druhú a oddeľme na pravej strane reálnu časť od imaginárnej:

$$5 - 12i = \underbrace{x^2 - y^2}_{\Re e} + \underbrace{2xy}_{\Im m}\, i. \tag{19}$$

Vieme, že dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a aj imaginárne časti. Ak v (19) porovnáme reálne časti ľavej a pravej strany, tak dostaneme $5 = x^2 - y^2$. Imaginárne časti nám dajú rovnicu $-12 = 2xy$. Presvedčte sa, že získaná sústava rovníc

$$\begin{aligned} 5 &= x^2 - y^2 \\ -12 &= 2xy \end{aligned} \tag{20}$$

má dve reálne riešenia $x_1 = -3$, $y_1 = 2$ a $x_1 = 3$, $y_1 = -2$ (nezabudnite na to, že x a y sú reálne čísla). Odtiaľ na základe (18) získame dve hodnoty danej odmocniny: $-3 + 2i$ a $3 - 2i$.

Cvičenia.

1. Určte reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla z:
   a) $z = 2 - \sqrt{3}i$; $[\Re e z = 2,\ \Im m z = -\sqrt{3}]$
   b) $z = 2 - \sqrt{3}$; $[\Re e z = 2 - \sqrt{3},\ \Im m z = 0]$
   c) $z = \sqrt{\pi} i$; $[\Re e z = 0,\ \Im m z = \sqrt{\pi}]$
   d) $z = i^{51} - \sqrt{3}$; $[\Re e z = -\sqrt{3},\ \Im m z = -1]$
   e) $z = i^{52} - \sqrt{3}$; $[\Re e z = 1 - \sqrt{3},\ \Im m z = 0]$
   f) $z = i^{52} + i^{152}$. $[\Re e z = 2,\ \Im m z = 0]$

2. Zapíšte v algebrickom tvare:
   a) $(2-3i)(4+5i) - 3i^4 - 11$; $[9 - 2i]$
   b) $8 - (2 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i + 2) + 5i^5$; $[1 + 5i]$
   c) $8 - (2 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i + 2)^2$; $[-6 - 7\sqrt{3}i]$
   d) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; $[1 + i]$
   e) $\dfrac{4+7i}{2i-1}$; $[2 - 3i]$
   f) $(i - 18) : (2i - 1)^2$; $[2 - 3i]$
   g) $\dfrac{4-7i}{2i-1}$; $[-\frac{18}{5} - \frac{1}{5}i]$

h) $|2i-1| + \overline{i-18} - \Re e(8^5 i)$; $[(\sqrt{5}-18)-i]$

i) $\dfrac{1-\overline{4-9i}}{2-|4i-3|}$. $[1+3i]$

3. Znázornite v Gaussovej rovine množinu všetkých $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré platí: a) $\Re ez = 2 \cdot \Re e\overline{z}$; b) $\Im mz < 2$; c) $\Re ez = 2 \cdot \Im m\overline{z}$; d) $\Im mz + \Re ez = |z|$; e) $|z| \leqq 3$; f) $1 < |z+i| \leqq 3$; g) $|z+1-4i| \geqq 5$; h) $\Re ez = z \cdot \overline{z}$; i) $|z| < 2|z|$; j) $\Re ez^2 = 2$; k) $|1+z| \leqq |1-z|$; ℓ) $|z| \geqq 3 \ \wedge \ \varphi = \frac{\pi}{5}$, kde φ je argument čísla z.

4. Vyriešte sústavu rovníc (20) zo strany 16, ak neznáme x a y sú z množiny komplexných čísel. $[(x,y) \in \{(3,-2),\ (-3,2),\ (2i,3i),\ (-2i,-3i)\}]$

5. Vyjadrite dané komplexné číslo v goniometrickom tvare:
   a) $-2-2i$; $[2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})]$
   b) $1-\sqrt{3}i$; $[2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})]$
   c) $1-\sqrt{3}$; $[(\sqrt{3}-1)(\cos\pi + i\sin\pi)]$
   d) $1+i+i^2+i^3+i^8+i^9$; $[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]$
   e) $7i$; $[7(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})]$
   f) $-5i$; $[5(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})]$
   g) π; $[\pi(\cos 0 + i\sin 0)]$
   h) $\sin 2 - \pi$; $[(\pi - \sin 2)(\cos 0 + i\sin 0)]$
   i) $\sin(2-\pi)$; $[\sin(\pi-2)(\cos\pi + i\sin\pi)]$
   j) $8\sqrt{3}i - 8$; $[16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})]$
   k) $-3+3i$; $[3\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})]$
   ℓ^*) $1+\cos\beta - i\sin\beta$, ak $\beta \in <0,\pi)$. $[2\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{-\beta}{2} + i\sin\frac{-\beta}{2}\right)]$

6. Určte reálnu a imaginárnu časť čísla z, ak
   a) $z = (\sqrt{3}+i)^{33}$; $[\Re ez = 0,\ \Im mz = -2^{33}]$
   b) $z = (1-i)^{16}(i-\sqrt{3})^6$; $[\Re ez = -16\,384,\ \Im mz = 0]$
   c) $z = (i-1)^8(1-\sqrt{3}i)^6$; $[\Re ez = 1\,024,\ \Im mz = 0]$
   d) $z = \left(\dfrac{i-1}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}$; $[\Re ez = 2^{-12},\ \Im mz = 0]$
   e) $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{19} \cdot i^{33}$; $[\Re ez = 1,\ \Im mz = 0]$
   f) $z = \dfrac{(i+1)^9(1+\sqrt{3}i)^5}{(1-i)^{15}}$. $[\Re ez = 2,\ \Im mz = -2\sqrt{3}]$

7. Pomocou výrazov $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$ vyjadrite výrazy (podobne ako v príklade 1.4 na strane 12):
   a) $\cos 3\varphi$ a $\sin 3\varphi$; $[\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;$ $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi]$
   b) $\cos 4\varphi$ a $\sin 4\varphi$. $[\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi;$ $\sin 4\varphi = 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi)]$

8. V algebrickom tvare určte všetky hodnoty danej odmocniny (výpočty interpretujte v Gaussovej rovine):
   a) $\sqrt[3]{i}$; $[-i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i]$
   b) $\sqrt[4]{16}$; $[2, \quad 2i, \quad -2, \quad 2i]$
   c) $\sqrt[3]{-8}$; $[1+\sqrt{3}i, \quad -2, \quad 1-\sqrt{3}i]$
   d) $\sqrt[4]{-1}$; $[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i]$
   e) $\sqrt[4]{(-1)^2}$; $[1, \quad i, \quad -1, \quad -i]$
   f) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$; $[\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right), \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right), \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right), \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)]$
   g) $\sqrt[6]{1}$; $[\pm 1, \quad \pm\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pm\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}]$
   h) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$; $[\sqrt{3}+i, \quad -1+\sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3}-i, \quad 1-\sqrt{3}i]$
   i) $\sqrt{11-60i}$. $[6-5i, \quad -6+5i]$

9. V goniometrickom tvare určte všetky hodnoty danej odmocniny (výpočty interpretujte v Gaussovej rovine):
   a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$; $[\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(1+2k)\pi}{9}+i\sin\frac{(1+2k)\pi}{9}\right), \quad k\in\{0;1;2\}]$
   b) $\sqrt[5]{1}$; $[\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), \quad k\in\{0;1;2;3;4\}]$
   c) $\sqrt[4]{i}$; $[\left(\cos\frac{(1+4k)\pi}{8}+i\sin\frac{(1+4k)\pi}{8}\right), \quad k\in\{0;1;2;3\}]$
   d) $\sqrt[4]{-1-i}$; $[\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(5+8k)\pi}{16}+i\sin\frac{(5+8k)\pi}{16}\right), \quad k\in\{0;1;2;3\}]$
   e) $\sqrt[6]{-i}$. $[\left(\cos\frac{(3+4k)\pi}{12}+i\sin\frac{(3+4k)\pi}{12}\right), \quad k\in\{0;1;2;3;4;5\}]$

10. Vypočítajte všetky hodnoty výrazu $\sqrt{12i-5}+\sqrt{3-4i}$.
    $[4+2i, \ 4i, \ -4i, \ -4-2i]$

11. Je známe, že jedna z hodnôt $\sqrt[5]{z}$ má tvar $3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$. Bez výpočtu čísla z určte goniometrické tvary všetkých hodnôt $\sqrt[5]{z}$.
    $[3(\cos\frac{(1+8k)\pi}{20}+i\sin\frac{(1+8k)5\pi}{20}), \ k\in\{0;1;2;3;4\}]$

12. V množine komplexných čísel vyriešte rovnicu:
    a) $z^2-4z+8=0$; $[\mathcal{K}=\{2+2i;\ 2-2i\}]$
    b) $z^2-(2+3i)z-1+3i=0$; $[\mathcal{K}=\{1+i;\ 1+2i\}]$
    c) $x^4+8x^2+16=0$; $[\mathcal{K}=\{2i;\ -2i\}]$
    d) $x^4+16=0$; $[\mathcal{K}=\{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i;\ -\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i\}]$
    e) $z^3+z^2+z+1=0$; $[\mathcal{K}=\{-1;\ i;\ -i\}]$
    f) $z^6-4z^3+8=0$; $[\sqrt{2}\left(\cos\frac{(8k\pm1)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k\pm1)\pi}{12}\right), \ k\in\{0,1,2\}]$
    g) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2=2i$. $[\mathcal{K}=\{-1+2i;\ \frac{-1-2i}{5}\}]$