Katedra matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická Univerzita v Košiciach

Úvod do lineárnej algebry

Monika Molnárová, Helena Myšková

2005

RECENZOVALI: RNDr. Štefan Schrötter, CSc.
RNDr. Zuzana Kimáková

ISBN 80-8073-361-9

Predhovor

Dôvodom vzniku tejto publikácie bolo poskytnúť študentom FEI TU študijný materiál, pomocou ktorého zvládnu praktické úlohy predmetu Úvod do lineárnej algebry.

Obsah je rozdelený do piatich kapitol, ktoré sú členené do podkapitol. Každá z nich obsahuje riešené príklady, neriešené úlohy a ich výsledky. Autori si stanovili dva ciele. Po prvé mali ambíciu oboznámiť čitateľa s technikami riešenia problémov z danej oblasti. Po druhé chceli poslucháčov bakalárskeho štúdia všetkých študijných programov na FEI TU informovať o nárokoch, ktoré budú na nich kladené v praktickej časti tohto predmetu. Kto totiž zvládol úlohy uvedené v tomto učebnom texte, ten má najlepšie predpoklady k tomu, aby úspešne absolvoval praktické časti priebežných kontrolných prác počas semestra ako aj záverečnej skúšky.

Autori sa okrem svojich dlhoročných skúseností z pedagogického pôsobenia na FEI TU opierali v prvom rade o práce podobného zamerania venované poslucháčom technických univerzít. Zoznam odporúčanej literatúry poskytne čitateľovi informácie o zdrojoch teoretických poznatkov i ďalších príkladov ako aj o zdrojoch, z ktorých môže čerpať pri rozširovaní svojich vedomostí z danej problematiky nad požadovaný rámec.

Prvé dve kapitoly ako aj poslednú podkapitolu piatej kapitoly vypracovala RNDr. Monika Molnárová, PhD. Tretiu, štvrtú a prvé dve časti piatej kapitoly vypracovala RNDr. Helena Myšková.

Autori vyslovujú vďaku recenzentom RNDr. Štefanovi Schrötterovi, CSc. a RNDr. Zuzane Kimákovej za pripomienky, ktoré viedli ku skvalitneniu textu po obsahovej i formálnej stránke.

Autori.

Obsah

1 Aritmetické vektory a matice

1.1 Aritmetické vektory

Príklad 1.1.1 *Utvorme lineárnu kombináciu* $\alpha\,\overline{x}_1 + \beta\,\overline{x}_2 + \gamma\,\overline{x}_3$, *ak* $\overline{x}_1 = (1,2,3)$, $\overline{x}_2 = (2,-1,1)$ *a* $\overline{x}_3 = (1,7,9)$ *pre* $\alpha = 2$, $\beta = -3$ *a* $\gamma = 1$.

Riešenie.
$2(1,2,3) - 3(2,-1,1) + 1(1,7,9) = (2,4,6) - (6,-3,3) + (1,7,9) = (-3,14,12)$. ♡

Príklad 1.1.2 *Zistime, či sú vektory* $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ *a* $\overline{x}_3$ *lineárne závislé alebo nezávislé*

a) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 & = & (1,2,3) \\ \overline{x}_2 & = & (2,-1,1) \\ \overline{x}_3 & = & (1,7,9) \end{array}$ b) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 & = & (1,2,3) \\ \overline{x}_2 & = & (2,-1,1) \\ \overline{x}_3 & = & (1,7,8). \end{array}$

Riešenie.

a) Utvoríme lineárnu kombináciu $\alpha\,\overline{x}_1 + \beta\,\overline{x}_2 + \gamma\,\overline{x}_3$ a zistíme, či má rovnica $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 + \gamma\overline{x}_3 = \overline{0}$ len triviálne (nulové) riešenie. Prepisom tejto rovnice
$$\alpha(1,2,3) + \beta(2,-1,1) + \gamma(1,7,9) = (0,0,0)$$
dostávame sústavu lineárnych rovníc
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & - & \beta & + & 7\gamma & = & 0\ . \\ 3\alpha & + & \beta & + & 9\gamma & = & 0 \end{array}$$
Eliminujeme neznámu α v druhej a tretej rovnici pričítaním -2 násobku, resp. -3 násobku prvej rovnice k druhej, resp. tretej rovnici. Dostávame
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 5\beta & + & 5\gamma & = & 0\ . \\ & - & 5\beta & + & 6\gamma & = & 0 \end{array}$$
Odčítaním druhej rovnice od tretej rovnice eliminujeme neznámu β v tretej rovnici:
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 5\beta & + & 5\gamma & = & 0\ . \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$
Sústava má jediné riešenie $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva, že vektory $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ a $\overline{x}_3$ sú lineárne nezávislé.

b) Analogickým postupom ako v predošlom príklade riešime sústavu
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & - & \beta & + & 7\gamma & = & 0\ . \\ 3\alpha & + & \beta & + & 8\gamma & = & 0 \end{array}$$

Po eliminácii α v druhej a tretej a β v tretej rovnici dostávame sústavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 5\beta & + & 5\gamma & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} .$$

Sústava má nekonečne veľa riešení (pre $\gamma = t \Rightarrow \beta = t,\ \alpha = -3t$ pre $t \in \mathbb{R}$). Ak zvolíme napr. $t = 1$, tak $\alpha = -3$, $\beta = 1$ a $\gamma = 1$ je netriviálne riešenie skúmanej sústavy, a teda vektory $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ a $\overline{x}_3$ sú lineárne závislé. ♡

Poznámka. Použitím maticového zápisu môžeme problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti množiny vektorov riešiť podobne ako problém hodnosti matice (viď kapitola *Aritmetické vektory a matice* podkapitola *Matice*).

Príklad 1.1.3 *Nájdime $t \in \mathbb{R}$, aby vektor $\overline{x} = (4, 3, t)$ reprezentoval lineárnu kombináciu vektorov $\overline{u} = (1, 2, 3)$, $\overline{v} = (2, -1, 5)$ a $\overline{w} = (3, 1, 8)$.*

Riešenie. Nech $\overline{x} = (4, 3, t)$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ a $\overline{w}$, tak $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ také, že $\alpha\,\overline{u} + \beta\,\overline{v} + \gamma\,\overline{w} = \overline{x}$, t.j.

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(2, -1, 5) + \gamma(3, 1, 8) = (4, 3, t).$$

Problém vedie teda ku riešeniu sústavy troch rovníc o neznámych α, β a γ s parametrom t:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & 4 \\ 2\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ 3\alpha & + & 5\beta & + & 8\gamma & = & t \end{array} .$$

Eliminujeme neznámu α v druhej, resp. tretej rovnici pričítaním -2 násobku prvej rovnice ku druhej, resp. -3 násobku prvej rovnice k tretej rovnici:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & 4 \\ & - & 5\beta & - & 5\gamma & = & -5 \\ & - & \beta & - & \gamma & = & t - 12 \end{array} .$$

Pripočítaním $-\frac{1}{5}$ násobku druhej rovnice k tretej rovnici eliminujeme neznámu β v tretej rovnici:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & 4 \\ & - & 5\beta & - & 5\gamma & = & -5 \\ & & & & 0 & = & t - 11 \end{array} .$$

Posledná rovnica má zmysel, teda systém má riešenie vtedy a len vtedy, ak $t = 11$, t.j. pre $t = 11$ $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ také, že $\overline{x}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ a $\overline{w}$. ♡

Úlohy:

1.1 Utvorte lineárne kombinácie $\alpha\,\overline{x}_1 + \beta\,\overline{x}_2 + \gamma\,\overline{x}_3$, ak $\overline{x}_1 = (3,-1,0,2)$, $\overline{x}_2 = (2,0,3,1)$ a $\overline{x}_3 = (-2,2,0,3)$ pre

a) $\alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = -1$

b) $\alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = 2$

c) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$

d) $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1.$

1.2 Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory

a) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 &=& (-2,1,0) \\ \overline{x}_2 &=& (1,2,0) \\ \overline{x}_3 &=& (-1,3,0) \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 &=& (-3,3,2) \\ \overline{x}_2 &=& (2,1,0) \\ \overline{x}_3 &=& (1,5,-2) \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 &=& (1,2,0,3) \\ \overline{x}_2 &=& (-1,-2,0,2) \\ \overline{x}_3 &=& (2,4,0,11) \end{array}$

d) $\begin{array}{rcl} \overline{x}_1 &=& (-2,2,0,1) \\ \overline{x}_2 &=& (-4,4,1,2) \\ \overline{x}_3 &=& (2,-2,-1,1). \end{array}$

1.3 Nájdite $t \in \mathbb{R}$, aby vektor $\overline{x}$ reprezentoval lineárnu kombináciu vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ a $\overline{w}$.

a) $\overline{u} = (1,2,3)$, $\overline{v} = (2,-1,5)$, $\overline{w} = (3,1,8)$, $\overline{x} = (1,7,t)$

b) $\overline{u} = (1,2,2)$, $\overline{v} = (0,1,-1)$, $\overline{w} = (2,1,7)$, $\overline{x} = (1,0,t)$

c) $\overline{u} = (2,4,6)$, $\overline{v} = (1,3,4)$, $\overline{w} = (-1,0,-1)$, $\overline{x} = (3,2,t)$

d) $\overline{u} = (3,0,6)$, $\overline{v} = (1,-2,0)$, $\overline{w} = (1,2,4)$, $\overline{x} = (2,1,t)$

e) $\overline{u} = (1,2,3)$, $\overline{v} = (2,4,5)$, $\overline{w} = (3,6,8)$, $\overline{x} = (1,7,t)$

f) $\overline{u} = (1,2,3)$, $\overline{v} = (2,-1,5)$, $\overline{w} = (3,1,9)$, $\overline{x} = (1,7,t)$.

Výsledky:

1.1

a) $(13,-5,3,4)$

b) $(2,2,0,10)$

c) $(5,-1,3,3)$

d) $(0,2,3,4)$

1.2

a) lineárne závislé

b) lineárne nezávislé

c) lineárne závislé

d) lineárne nezávislé

1.3

a) $t = 4$ b) $t = 4$ c) $t = 5$

d) $t = 5$ e) $\nexists$ f) $t \in \mathbb{R}$

1.2 Matice

Príklad 1.2.1 *Pre matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

vypočítajme

a) $2A - B$ b) $3A + 2C$ c) $A \cdot B$ d) $B \cdot A$

e) A^2 f) B^2 g) $A^\top$ h) $B^\top$.

Riešenie.

a) $$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$-B = -\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Keďže sčítavať môžme len matice rovnakého rozmeru, $2A - B$ neexistuje.

b) Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu sú v tomto prípade obe matice rovnakého rozmeru, čiže všetky operácie môžeme uskutočniť.

$$3A + 2C = 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

c) Podmienkou existencie súčinu dvoch matíc je, aby počet stĺpcov prvej matice bol rovný počtu riadkov druhej matice. Keďže pre $C = A \cdot B$ je

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

dostávame

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2{\cdot}5 + 0{\cdot}1 - 1{\cdot}0, & 2{\cdot}2 + 0{\cdot}0 - 1{\cdot}2, & 2{\cdot}1 + 0{\cdot}(-1) - 1{\cdot}3 \\ 3{\cdot}5 + 2{\cdot}1 + 0{\cdot}0, & 3{\cdot}2 + 2{\cdot}0 + 0{\cdot}2, & 3{\cdot}1 + 2{\cdot}(-1) + 0{\cdot}3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 17 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Počet stĺpcov matice B sa nerovná počtu riadkov matice A, teda $B \cdot A$ neexistuje. Všimnime si, že v našom prípade $A \cdot B \neq B \cdot A$.

e) Jednoduchým dôsledkom podmienky existencie súčinu dvoch matíc je, že $A^2 = A \cdot A$ sa dá vypočítať len v prípade štvorcovej matice, teda A^2 neexistuje.

f) $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 27 & 12 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$

g) Transponovaná matica k danej matici vzniká zámenou riadkov a stĺpcov. Z prvého riadku sa tak stáva prvý stĺpec a naopak, atď.

$$A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

h) $B^\top = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$ ♡

Príklad 1.2.2 *Nájdime hodnotu polynómu* $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ *pre maticu* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$

Riešenie.
$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A - 5E =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^3 - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}.$$ ♡

Príklad 1.2.3 *Určme hodnosť matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav nájdeme ekvivalentnú stupňovitú maticu. Príslušné úpravy budeme graficky značiť do riadkov (resp. stĺpcov) za (resp. pod) upravovanú maticu. Teda $\leftrightarrows$ v prvom a treťom riadku znamená napríklad, že sa tieto riadky navzájom vymenia. Tým dosiahneme, aby hlavný prvok v prvom stĺpci bol 1. Pomocou neho vynulujeme ostatné prvky v prvom stĺpci ($-3R_1$ za druhým riadkom znamená, že sme od druhého riadku odpočítali trojnásobok prvého riadku). Analogicky pomocou hlavného prvku v druhom riadku (-5) vynulujeme členy druhého stĺpca pod hlavnou diagonálou. Podobne by sme pokračovali v úpravách ďalej. V tomto prípade výpočet končí, keďže zvyšné riadky sú nulové.

$$A = \left[\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftrightarrows \\ \\ \leftrightarrows \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -4R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \\ -3R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hodnosť matice je rovná počtu nenulových riadkov stupňovitej matice, t.j. $\mathrm{h}(A) = 2$. ♡

Poznámka. V prípade, ak hlavný prvok nie je rovný 1 (resp. -1) a ani vhodnou výmenou riadkov (resp.) stĺpcov sa to nedá dosiahnuť, je výhodné vhodnou lineárnou kombináciou riadkov hodnotu 1 (resp. -1) dostať. Nie je to ale nevyhnutné v prípade, ak sú všetky uvažované hodnoty v danom stĺpci násobkami jednej z nich, ako sme videli v predchádzajúcom príklade.

Príklad 1.2.4 *V závislosti na parametri α určme hodnosť matice*

$$A = \left[\begin{array}{rrrr} \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných úprav prevedieme maticu na stupňovitý tvar a urobíme úplnú diskusiu riešenia vzhľadom na parameter α. Používame zápis uvedený v Príklade 1.2.3.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftrightarrows \\ \\ \leftrightarrows \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +R_1 \\ +\alpha R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftrightarrows \\ \\ \leftrightarrows \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \\ +\alpha R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\alpha R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1-4\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

I. $\alpha = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3.$

II. $\alpha \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4.$ ♡

Príklad 1.2.5 *Zistime, či sú vektory lineárne závislé alebo nezávislé*

$$\overline{x}_1 = (2,3,-1,4) \qquad \overline{x}_3 = (5,3,1,3)$$
$$\overline{x}_2 = (3,0,2,-2) \qquad \overline{x}_4 = (4,6,-2,7).$$

Riešenie. Vytvoríme maticu, ktorej riadky tvoria vektory $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ a $\overline{x}_4$. Pomocou ekvivalentných riadkových, resp. stĺpcových úprav upravujeme maticu na stupňovitý tvar. V prípade, že v priebehu výpočtu dostaneme aspoň jeden nulový riadok (t.j. hodnosť matice je menšia ako počet vektorov), sú vektory lineárne závislé. V opačnom prípade (t.j. hodnosť matice sa rovná počtu vektorov) sú lineárne nezávislé.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +3R_1 \\ +5R_1 \\ +4R_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -7 & 16 \\ 0 & 18 & -14 & 33 \\ 0 & 18 & -14 & 31 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2R_2 \\ -2R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +R_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektory $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ a $\overline{x}_4$ sú lineárne závislé. ♡

Úlohy:

1.4 Vypočítajte pre dané matice

a) $3A - 2B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$

d) A^2 e) B^2 f) $A^\top$,

ak

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

1.5 Nájdite hodnotu polynómu $P(x)$ pre danú maticu

1) $P(x) = x^2 - 4$

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

1.6 Určte hodnosť matice

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 27 & 26 & 25 \\ 19 & 18 & 17 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$

1.7 V závislosti na parametri α určte hodnosť matice

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ \alpha & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha - 1 & 1 \\ 3 & \alpha & 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 2 & 2 & -\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha & 2 & 2 \\ -\alpha & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ \alpha & 4 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & \alpha & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & -5 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$

1.8 Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory

a) $\overline{x}_1 = (2,3,4)$, $\overline{x}_2 = (3,0,-1)$, $\overline{x}_3 = (5,3,2)$

b) $\overline{x}_1 = (2,0,2,1)$, $\overline{x}_2 = (-3,2,-2,5)$, $\overline{x}_3 = (-1,2,0,6)$, $\overline{x}_4 = (-4,5,-2,11)$

c) $\overline{x}_1 = (3,1,0,1,0)$, $\overline{x}_2 = (2,-1,2,0,3)$, $\overline{x}_3 = (6,0,5,2,1)$, $\overline{x}_4 = (2,2,1,2,-5)$

d) $\overline{x}_1 = (3,2,0)$, $\overline{x}_2 = (4,1,2)$, $\overline{x}_3 = (1,-1,1)$

e) $\overline{x}_1 = (3,2,0,1)$, $\overline{x}_2 = (5,1,1,2)$, $\overline{x}_3 = (2,0,1,1)$, $\overline{x}_4 = (3,1,0,2)$

f) $\overline{x}_1 = (2,-3,-1,-4,1)$, $\overline{x}_2 = (0,2,2,5,2)$, $\overline{x}_3 = (2,-2,0,-2,3)$, $\overline{x}_4 = (1,5,6,11,4)$.

Výsledky:

1.4

1) a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) neexistuje c) neexistuje d) neexistuje e) neexistuje f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) a) neexistuje b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) neexistuje d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ e) neexistuje f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) a) neexistuje b) neexistuje c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ d) neexistuje e) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2, 1 \end{bmatrix}$

4) a) neexistuje b) neexistuje c) neexistuje d) neexistuje e) neexistuje f) $\begin{bmatrix} 1, 2, 3 \end{bmatrix}^\top$

5) a) neexistuje b) $\begin{bmatrix} 9, 13 \end{bmatrix}$ c) neexistuje d) neexistuje e) neexistuje f) $\begin{bmatrix} 1, 2, 3 \end{bmatrix}^\top$

6) a) neexistuje b) $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ c) neexistuje d) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e) neexistuje f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7) a) neexistuje c) neexistuje e) neexistuje

b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.5

1) a) $P(A) = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$ b) $P(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

2) a) $P(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$ b) $P(A) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

1.6

a) $\mathrm{h}(A) = 3$ d) $\mathrm{h}(A) = 2$ g) $\mathrm{h}(A) = 3$

b) $\mathrm{h}(A) = 2$ e) $\mathrm{h}(A) = 3$

c) $\mathrm{h}(A) = 2$ f) $\mathrm{h}(A) = 2$ h) $\mathrm{h}(A) = 2$

1.7

a) $\alpha = 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 2, \quad \alpha \neq 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3$

b) $\alpha = 1 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 1, \quad \alpha = -3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3,$
$\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

c) $\alpha = -2 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 1, \quad \alpha = 6 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3,$
$\alpha \neq -2 \wedge \alpha \neq 6 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

d) $\alpha = -15 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3, \quad \alpha \neq -15 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

e) $\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 2, \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3$

f) $\alpha = \pm 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3, \quad \alpha \neq \pm 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

g) $\alpha = 1 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3, \quad \alpha \neq 1 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

h) $\alpha = 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 3, \quad \alpha \neq 3 \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 4$

1.8

a) lineárne nezávislé c) lineárne závislé e) lineárne závislé

b) lineárne nezávislé d) lineárne závislé f) lineárne nezávislé

1.3 Determinanty matíc

Príklad 1.3.1 *Vypočítajme determinanty matíc*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Riešenie.

a) Matica je stupňa 2, môžeme použiť krížové (Sarusovo) pravidlo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5.$$

b) Matica je stupňa 3, môžeme opäť použiť krížové pravidlo. Ako pomôcku si podpíšeme prvé dva riadky. Výsledok bude pozostávať zo súčtu šiestich sčítancov. Prvý sčítanec vznikne súčinom prvkov na hlavnej diagonále. Pod ňou sa nachádzajú dve ďalšie "diagonály", súčinom prvkov na nich dostaneme druhý a tretí sčítanec (súčiny zľava). Podobným spôsobom vypočítame ďalšie členy, ak urobíme súčin prvkov na vedľajšej diagonále a "diagonálach" pod ňou (súčiny sprava). Súčiny zľava zoberieme so znamienkom plus a súčiny sprava so znamienkom mínus.

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \end{array} = 2{\cdot}0{\cdot}5 + 1{\cdot}1{\cdot}4 + 3{\cdot}3{\cdot}2 - (4{\cdot}0{\cdot}3 + 2{\cdot}1{\cdot}2 + 5{\cdot}3{\cdot}1) =$$

$$= 4 + 18 - (4 + 15) = 22 - 19 = 3.$$

c) Podobným spôsobom vypočítame aj nasledujúci determinant. Výpočet si môžeme uľahčiť tým, že použijeme jednu z ekvivalentných úprav a síce vynásobíme tretí stĺpec $\frac{1}{3}$. Keďže sa tým hodnota determinantu zníži na $\frac{1}{3}$ pôvodnej hodnoty, musíme výsledok vynásobiť 3. V skutočnosti teda vynímame spoločný deliteľ členov stĺpca pred determinant.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3(15+32+28-35-16-24) = 0.$$

Poznámka. Tento výsledok môžeme interpretovať aj nasledujúcim spôsobom: riadky (resp. stĺpce) matice A sú lineárne závislé.

d) Pre matice stupňa väčšieho ako 3 nemôžeme použiť krížové pravidlo. Použijeme ekvivalentné úpravy, aby sme dostali stĺpec (resp. riadok) s čo možno najväčším počtom núl. Následne urobíme rozvoj podľa daného stĺpca (resp. riadku). V našom prípade po odčítaní druhého riadku od tretieho a štvornásobku druhého riadku od štvrtého riadku, urobíme rozvoj podľa prvého stĺpca. Je v ňom jediný nenulový člen $a_{21} = 1$. Jeho pozícia určuje mocninu člena (-1). Dostávame teda 1 krát $(-1)^{2+1}$ krát subdeterminant, ktorý vznikne vynechaním druhého riadku a prvého stĺpca. Ďalej pokračujeme krížovým pravidlom.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \\ -4R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -[-4-6+9-(6-9-4)] = -6.$$

Poznámka. Rozvoj podľa niektorého riadku alebo stĺpca bez predchádzajúcich úprav by viedol v najlepšom prípade nie k jednému ale k trom subdeterminantom stupňa 3 (rozvoj podľa prvého alebo druhého riadku, resp. stĺpca).

e) V tomto prípade vidíme hneď, že je výhodné urobiť rozvoj podľa štvrtého stĺpca, v ktorom je jediný nenulový člen. Následne urobíme rozvoj podľa tretieho stĺpca a potom podľa druhého stĺpca. Nakoniec krížovým pravidlom vyčíslime hodnotu determinantu.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -6(10-6) = -24.$$

f) Determinant vyčíslime pomocou výsledku predchádzajúceho príkladu a vplyvu ekvivalentných úprav na hodnotu determinantu. Oproti predchádzajúcemu príkladu sú navzájom vymenené prvé dva riadky, to mení znamienko nášho determinantu. Štvrtý riadok je dvojnásokom pôvodného riadku, to zvyšuje hodnotu na dvojnásobok a analogicky posledný riadok je trojnásobkom, teda výsledok predchádzajúceho príkladu vynásobíme aj tromi.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-24) = 144. \qquad \heartsuit$$

Úlohy:

1.9 Vypočítajte determinanty matíc

a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $F = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $G = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ g) $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ h) $I = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$

1.10 Vypočítajte determinanty matíc

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ g) $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$

f) $G = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ h) $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$

1.11 Vypočítajte determinanty matíc

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

1.12 Riešte rovnice na množine $\mathbb{C}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3 \\ x & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ e) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & 2-x & -2 \\ 1-x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ f) $\begin{vmatrix} -2x & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 2$

c) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 4 \\ 0 & -2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ g) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & x \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -21$ h) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13.$

Výsledky:

1.9

a) $|A| = -35$
b) $|B| = -35$
c) $|C| = -70$
d) $|D| = -175$
e) $|F| = 12$
f) $|G| = 24$
g) $|H| = 36$
h) $|I| = 60$

1.10

a) $|A| = -6$
b) $|B| = -4$
c) $|C| = -570$
d) $|D| = 12$
e) $|F| = -48$
f) $|G| = 223$
g) $|H| = -24$
h) $|I| = -24$

1.11

a) $|A| = 29$
b) $|B| = 99$
c) $|C| = -2$
d) $|D| = 144$

1.12

a) $8x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{3}{8}$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$

c) $x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2i,\ x_3 = +2i$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$

f) $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

g) $x^3 + x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

h) $x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = -2$

1.4 Inverzné matice

Príklad 1.4.1 *Vypočítajme inverznú maticu k danej matici.*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

Riešenie.

a) Determinant matice $|A| = 0$, t.j. matica je singulárna a teda inverzná matica k nej neexistuje.

b) Determinant matice je rovný $|B| = -2$, t.j. matica je regulárna a teda inverzná matica k nej existuje. Nájdeme ju pomocou adjungovanej matice.

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}^{\top}.$$

B_{ij} reprezentuje subdeterminant, ktorý vznikne vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca v pôvodnej matici vynásobený $(-1)^{i+j}$.

$B_{11} = (-1)^{1+1}b_{22} = 5,$ $B_{21} = (-1)^{2+1}b_{12} = -3,$

$B_{12} = (-1)^{1+2}b_{21} = -4,$ $B_{22} = (-1)^{2+2}b_{11} = 2.$

Teda

$$B^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{\top} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Keďže determinant matice $|C| = -1$, matica je regulárna. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade nájdeme inverznú maticu pomocou adjungovanej matice.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

Teda

$$C^{-1} = -\tfrac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\top} = - \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Predchádzajúci výpočet ukázal, že časová náročnosť výpočtu pre maticu stupňa 3 je podstatne vyššia ako bola pre maticu stupňa 2. V prípade matice D by to dokonca znamenalo vyčíslenie jedného determinantu stupňa 4 a 16 determinantov stupňa 3. Preto použijeme pre výpočet inverznej matice Gaussovu eliminačnú metódu. Napíšeme si blokovú maticu $(D|E)$, kde pred čiarou je umiestnená daná matica a za čiarou jednotková matica príslušného stupňa. Pomocou ekvivalentných riadkových operácií upravíme v prvej časti blokovú maticu na tvar, kde matica pred čiarou je horná trojuholníková (prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule).

$$(D|E) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +3R_1 \\ +4R_1 \\ +5R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -2R_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

Následne pokračujeme v úpravách, aby sme pred čiarou dostali diagonálnu maticu. Posledným krokom je vhodné násobenie riadkov, aby matica naľavo bola jednotková matica. V takom prípade je inverznou maticou matica napravo od čiary.

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} .(-1) \\ .(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Teda

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \heartsuit$$

Príklad 1.4.2 *Pomocou inverznej matice riešme maticové rovnice*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Riešenie.

a) Danú maticovú rovnicu môžeme formálne zapísať v tvare $AXB = C$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pri výpočte využijeme fakt, že matice A a B sú regulárne, z čoho vyplýva, že k nim existujú inverzné matice. Ak teda rovnicu vynásobíme zľava inverznou maticou k matici A, dostávame $A^{-1}AXB = EXB = XB$, kde E je príslušná jednotková matica. Analogicky odstránime maticu B na pravej strane, keď vynásobíme rovnicu sprava B^{-1}. Takže $X = A^{-1}CB^{-1}$.

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= -\tfrac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{24} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Danú maticovú rovnicu môžeme formálne zapísať nasledujúcim spôsobom $AX - B = C$. Pripočítaním matice B k obom stranám rovnice dostávame $AX = B + C$. Ďalej postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade, t.j. $X = A^{-1}(B+C)$. Použijeme výsledok Príkladu 1.4.1 c).

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

♡

Úlohy:

1.13 Vypočítajte inverznú maticu k danej matici

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

f) $G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

g) $H = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

h) $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

i) $J = \begin{bmatrix} 9 & 17 & 8 \\ 18 & 34 & 17 \\ 10 & 19 & 8 \end{bmatrix}$

j) $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

k) $L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

l) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.14 Pomocou inverznej matice riešte maticové rovnice

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

i) $X \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix}$

k) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

m) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

n) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

o) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

p) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & -12 & 6 \\ 1 & 19 & -16 \end{bmatrix}$

r) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 9 \\ -15 & 23 & -17 \\ 5 & -28 & 23 \end{bmatrix}$

s) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 23 \\ 10 & 25 & 7 \\ -29 & -25 & -3 \end{bmatrix}.$

Výsledky:

1.13

a) A^{-1} neexistuje

b) $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $D^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $F^{-1} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 14 & -7 & 7 \\ 8 & 14 & -5 \\ -5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

f) $G^{-1} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -11 & -1 & 9 \\ -17 & -6 & 5 \\ 26 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

g) $H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$

h) $I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

i) $J^{-1} = \begin{bmatrix} 51 & -16 & -17 \\ -26 & 8 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

j) $K^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

k) $L^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -10 & -18 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

l) $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.14

a) $X = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

b) $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

e) $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

f) $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

g) $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

h) $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

i) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

j) $X = (\ 3, 2, 1\ )^\top$

k) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

l) $X = [\ 1, 2, -1\ ]^\top$

m) $X = \begin{bmatrix} 2, 3, 5 \end{bmatrix}^\top$

n) $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

o) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

p) $X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

r) $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

s) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

2 Sústavy lineárnych rovníc

2.1 Cramerovo pravidlo

Príklad 2.1.1 *Pomocou Cramerovho pravidla riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}.$$

Riešenie. Matica sústavy je štvorcová, teda môžeme začať počítať pomocou Cramerovho pravidla. Vypočítame determinant matice sústavy D

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35.$$

Keďže determinant matice sústavy je rôzny od nuly, môžeme pokračovať vo výpočte pomocou Cramerovho pravidla. Nahradením prvého stĺpca stĺpcom pravej strany dostaneme determinant D_1. Analogicky vypočítame D_2 a D_3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -70,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -175.$$

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-175}{-35} = 5.$$

♡

Poznámka. V prípade, že je determinant matice sústavy rovný nule, použijeme Gaussovu eliminačnú metódu.

Je zvykom uvádzať riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc v tvare stĺpcového vektora $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$. Dôvodom je maticový zápis sústavy (viď nasledujúca podkapitola). Vzhľadom na to, že vektor je špeciálnym prípadom matice, možno ho zapisovať aj v tvare, ktorý sme používali v predchádzajúcej kapitole.

Úlohy:

2.1 Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= -6 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 18 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x_1 - x_2 + 5x_3 &= 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + 3x_2 &= -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

l) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$

m) $\begin{aligned} 6x_2 + 4x_3 &= -12 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

n) $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 &= 0 \end{aligned}$

o) $\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

p) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

r) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

s) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 13 \\ 12x_1 + 9x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

t) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37 \end{aligned}$

u) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 3x_2 &+& 11x_3 &+& 5x_4 &=& 2 \\ x_1 &+& x_2 &+& 5x_3 &+& 2x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &+& 2x_4 &=& -3 \\ x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &+& 4x_4 &=& -3 \end{array}$$

v) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 &+& 4x_2 &+& x_3 &+& 2x_4 &=& -3 \\ 3x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& 5x_4 &=& -6 \\ 6x_1 &+& 8x_2 &+& x_3 &+& 5x_4 &=& -8 \\ 3x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& 7x_4 &=& -8 \end{array}$$

z) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &-& x_3 &-& 2x_4 &=& -2 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 8 \\ x_1 &-& x_2 &-& x_3 &+& x_4 &=& 1 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 4 \end{array}.$$

Výsledky:

2.1

a) $x_1 = \frac{-3}{-1},\ x_2 = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \overline{x} = (3,1)^\top$

b) $x_1 = \frac{48}{24},\ x_2 = \frac{72}{24} \Rightarrow \overline{x} = (2,3)^\top$

c) $x_1 = \frac{-36}{-12},\ x_2 = \frac{12}{-12},\ x_3 = \frac{-24}{-12} \Rightarrow \overline{x} = (3,-1,2)^\top$

d) $x_1 = \frac{56}{28},\ x_2 = \frac{28}{28},\ x_3 = \frac{-28}{28} \Rightarrow \overline{x} = (2,1,-1)^\top$

e) $x_1 = \frac{24}{12},\ x_2 = \frac{36}{12},\ x_3 = \frac{60}{12} \Rightarrow \overline{x} = (2,3,5)^\top$

f) $x_1 = \frac{-72}{-36},\ x_2 = \frac{36}{-36},\ x_3 = \frac{-36}{-36} \Rightarrow \overline{x} = (2,-1,1)^\top$

g) $x_1 = \frac{14}{14},\ x_2 = \frac{-28}{14},\ x_3 = \frac{0}{14} \Rightarrow \overline{x} = (1,-2,0)^\top$

h) $x_1 = \frac{1}{1},\ x_2 = \frac{-1}{1},\ x_3 = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{x} = (1,-1,2)^\top$

i) $x_1 = \frac{2}{2},\ x_2 = \frac{-2}{2},\ x_3 = \frac{4}{2} \Rightarrow \overline{x} = (1,-1,2)^\top$

j) $x_1 = \frac{-12}{-6},\ x_2 = \frac{6}{-6},\ x_3 = \frac{0}{-6} \Rightarrow \overline{x} = (2,-1,0)^\top$

k) $x_1 = \frac{9}{9},\ x_2 = \frac{18}{9},\ x_3 = \frac{27}{9} \Rightarrow \overline{x} = (1,2,3)^\top$

l) $x_1 = \frac{-70}{-35},\ x_2 = \frac{105}{-35},\ x_3 = \frac{70}{-35} \Rightarrow \overline{x} = (2,-3,-2)^\top$

m) $x_1 = \frac{150}{30},\ x_2 = \frac{-60}{30},\ x_3 = \frac{0}{30} \Rightarrow \overline{x} = (5,-2,0)^\top$

n) $x_1 = \frac{4}{4},\ x_2 = \frac{-6}{4},\ x_3 = \frac{2}{4} \Rightarrow \overline{x} = (1,\frac{-3}{2},\frac{1}{2})^\top$

o) $x_1 = \frac{-28}{-7},\ x_2 = \frac{21}{-7},\ x_3 = \frac{-14}{-7} \Rightarrow \overline{x} = (4,-3,2)^\top$

p) $x_1 = \frac{18}{-18},\ x_2 = \frac{-36}{-18},\ x_3 = \frac{-18}{-18} \Rightarrow \overline{x} = (-1, 2, 1)^\top$

r) $x_1 = \frac{-30}{-15},\ x_2 = \frac{45}{-15},\ x_3 = \frac{-45}{-15} \Rightarrow \overline{x} = (2, -3, 3)^\top$

s) $x_1 = \frac{84}{168},\ x_2 = \frac{-56}{168},\ x_3 = \frac{168}{168} \Rightarrow \overline{x} = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, 1)^\top$

t) $x_1 = \frac{-3}{-3},\ x_2 = \frac{-6}{-3},\ x_3 = \frac{-6}{-3},\ x_4 = \frac{0}{-3} \Rightarrow \overline{x} = (1, 2, 2, 0)^\top$

u) $x_1 = \frac{-28}{14},\ x_2 = \frac{0}{14},\ x_3 = \frac{14}{14},\ x_4 = \frac{-14}{14} \Rightarrow \overline{x} = (-2, 0, 1, -1)^\top$

v) $x_1 = \frac{-12}{-6},\ x_2 = \frac{12}{-6},\ x_3 = \frac{-6}{-6},\ x_4 = \frac{6}{-6} \Rightarrow \overline{x} = (2, -2, 1, -1)^\top$

z) $x_1 = \frac{-9}{-9},\ x_2 = \frac{-18}{-9},\ x_3 = \frac{-9}{-9},\ x_4 = \frac{-27}{-9} \Rightarrow \overline{x} = (1, 2, 1, 3)^\top$

2.2 Sústavy lineárnych rovníc v maticovom tvare

Príklad 2.2.1 *Pomocou inverznej matice riešme nad* $\mathbb{R}$ *sústavu lineárnych algebraických rovníc*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Použijeme maticový zápis $A\overline{x} = \overline{b}$ pre danú sústavu. Dostávame

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Túto maticovú rovnicu riešime pomocou inverznej matice k matici sústavy. Použijeme postup popísaný v kapitole *Aritmetické vektory a matice* v podkapitole *Inverzné matice.*

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \heartsuit$$

Poznámka. Podobne ako v prípade Cramerovho pravidla je riešenie sústavy algebraických rovníc pomocou inverznej matice obmedzené na prípady, kedy je matica sústavy regulárna t.j. sústava má práve jedno riešenie.

Úlohy:

2.2 Pomocou inverznej matice riešte sústavy lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

a) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$ d) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$.

Výsledky:

2.2

a) $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) $\overline{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 9 & -7 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

2.3 Gaussova eliminačná metóda

Príklad 2.3.1 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu sústavy rozšírenú o stĺpec pravých strán (rozšírená matica sústavy) na stupňovitý tvar (popísané v kapitole *Aritmetické vektory a matice* v podkapitole *Matice*).

$$(A\,|\,\overline{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} -R_4 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ +4R_1 \\ +8R_1 \\ +3R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ +4R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Keďže hodnosť matice sústavy je rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A^\star) = 4$, sústava má riešenie. Zároveň počet neznámych je rovný hodnosti $n = \mathrm{h}(A) = 4$, z toho vyplýva, že sústava má práve jedno riešenie. Z poslednej rovnice vypočítame hodnotu x_4. Postupným dosadzovaním do predchádzajúcich rovníc dostaneme hodnoty ostatných neznámych.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 2 \end{array} \qquad \Rightarrow x_4 = -1.$$

Z tretej rovnice dostávame $x_3 - x_4 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = -1.$

Z druhej rovnice dostávame $-x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \quad \Rightarrow x_2 = 1.$

Z prvej rovnice dostávame $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \quad \Rightarrow x_1 = 1.$

Riešením sústavy je vektor $\overline{x} = (1, 1, -1, -1)^\top$. ♡

Príklad 2.3.2 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 6 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$(A\,|\,\overline{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -5R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right].$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa nerovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(A) = 3 \neq \mathrm{h}(A^\star) = 4$, sústava nemá riešenie. ♡

Príklad 2.3.3 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \leftrightarrows \\ \cdot(-1)\ \leftrightarrows \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A^\star) = 3$, sústava má riešenie. Zároveň počet neznámych je väčší ako hodnosť matice $n = 5 > \mathrm{h}(A) = 3$, z toho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení. Počet voľných premenných určíme na základe vzťahu $n - \mathrm{h}(A) = 5 - 3 = 2$ (t.j. lineárny priestor všetkých riešení danej sústavy je dvojrozmerný).

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}.$$

Volíme dve voľné premenné. Keďže $x_4 = 0$, vzhľadom na druhú rovnicu z dvojice x_3 a x_5 vyberieme jednu a z dvojice x_1 a x_2 vyberieme druhú voľnú premennú. Nech $x_5 = t$ a $x_1 = s \Rightarrow$ z druhej rovnice dostávame:

$$x_3 + x_4 + 4x_5 = 3 \ \Rightarrow x_3 = 3 - 4t.$$

Nakoniec dosadíme vypočítané hodnoty do prvej rovnice a určíme x_2

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \ \Rightarrow x_2 = 1 - t + 2s.$$

Riešením sústavy je vektor $\overline{x} = (s, 1 - t + 2s, 3 - 4t, 0, t)^\top$ pre $s, t \in \mathbb{R}$. ♡

Poznámka. Pri inej voľbe voľných premenných, z tých ktoré boli prípustné v tomto príklade, je vyjadrenie výsledku odlišné od toho, ktoré sme pri horeuvedenom výpočte dostali.

Úlohy:

2.3 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 5x_2 &+& 4x_3 &+& x_4 &=& 20 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &=& 11 \\ 2x_1 &+& 10x_2 &+& 9x_3 &+& 7x_4 &=& 40 \\ 3x_1 &+& 8x_2 &+& 9x_3 &+& 2x_4 &=& 37 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 3x_2 &+& 11x_3 &+& 5x_4 &=& 2 \\ x_1 &+& x_2 &+& 5x_3 &+& 2x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &+& 2x_4 &=& -3 \\ x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &+& 4x_4 &=& -3 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 7x_1 &+& 9x_2 &+& 4x_3 &+& 2x_4 &=& 2 \\ 2x_1 &-& 2x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 6 \\ 5x_1 &+& 6x_2 &+& 3x_3 &+& 2x_4 &=& 3 \\ 2x_1 &+& 3x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 0 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 &+& 4x_2 &+& x_3 &+& 2x_4 &=& -3 \\ 3x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& 5x_4 &=& -6 \\ 6x_1 &+& 8x_2 &+& x_3 &+& 5x_4 &=& -8 \\ 3x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& 7x_4 &=& -8 \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &-& x_3 &-& 2x_4 &=& -2 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 8 \\ x_1 &-& x_2 &-& x_3 &+& x_4 &=& 1 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 4 \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 &-& x_2 &+& x_3 &-& x_4 &=& 3 \\ 4x_1 &-& 2x_2 &-& 2x_3 &+& 3x_4 &=& 2 \\ 2x_1 &-& x_2 &+& 5x_3 &-& 6x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &-& x_2 &-& 3x_3 &+& 4x_4 &=& 5 \end{array}$$

g) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &-& 3x_2 &+& 6x_3 &-& x_4 &=& 1 \\ x_1 &+& 2x_2 &-& x_3 && &=& 0 \\ x_1 &+& 3x_2 &-& x_3 &-& x_4 &=& -2 \\ 9x_1 &-& x_2 &+& 15x_3 &-& 5x_4 &=& 1 \end{array}$$

h) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 &+& 12x_2 &+& 9x_3 &+& 25x_4 &=& 15 \\ 15x_1 &+& 34x_2 &+& 25x_3 &+& 64x_4 &=& 40 \\ 20x_1 &+& 46x_2 &+& 34x_3 &+& 89x_4 &=& 70 \\ 10x_1 &+& 23x_2 &+& 17x_3 &+& 44x_4 &=& 25 \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$

j)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & -7 \end{array}$$

k)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 7x_4 & = & 3 \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 12x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 3 \\ 11x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 24x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \end{array}$$

n)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & 6x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 6x_5 & = & -1 \end{array}$$

o)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

p)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 12x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\ 11x_1 & + & 11x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & -4 \end{array}$$

r) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & -6 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

s) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 10x_4 & = & -2 \\ 7x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & & & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \end{array}$$

t) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ 11x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$$

u) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array} .$$

Výsledky:

2.3

a) $\overline{x} = (1, 2, 2, 0)^\top$

b) $\overline{x} = (-2, 0, 1, -1)^\top$

c) $\overline{x} = (\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 1)^\top$

d) $\overline{x} = (2, -2, 1, -1)^\top$

e) $\overline{x} = (1, 2, 1, 3)^\top$

f) sústava nemá riešenie

g) sústava nemá riešenie

h) sústava nemá riešenie

i) sústava nemá riešenie

j) $\overline{x} = (3, 0, -5, 11)^\top$

k) $\overline{x} = (\frac{5}{8} - 3t - s, 2t, 8s, -\frac{1}{4} + 10s)^\top$ $s, t \in \mathbb{R}$

l) $\overline{x} = (6 - 26t + 17s, -1 + 7t - 5s, t, s)^\top$ $s, t \in \mathbb{R}$

m) $\overline{x} = (-\frac{3}{2} - 5t - 13s, -\frac{7}{2} - 7t - 19s, 2t, 2s)^\top$ $s, t \in \mathbb{R}$

n) sústava nemá riešenie

o) $\overline{x} = (3, 0, -2, 0, 1)^\top$

p) $\overline{x} = (8 - 9t - 4s, t, s, -10 + 11t + 5s)^\top$ $s, t \in \mathbb{R}$

r) sústava nemá riešenie

s) $\overline{x} = (2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2})^\top$

t) $\overline{x} = (-\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{15}{7}, 0)^\top$

u) $\overline{x} = (t, t, 1 + t, 1)^\top$ $t \in \mathbb{R}$

2.4 Homogénna sústava

Príklad 2.4.1 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme homogénnu sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu sústavy na stupňovitý tvar. Keďže lineárna kombinácia núl je opäť nula, nie je potrebné zapisovať vektor pravej strany.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ +R_1 \\ +2R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ +3R_2 \\ +5R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 17 & -24 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ .5 - 17R_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 101 \end{bmatrix}.$$

Keďže hodnosť matice sústavy je u homogénnych sústav vždy rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy, homogénna sústava má vždy aspoň jedno riešenie a tým je nulový vektor (triviálne riešenie). Počet neznámych tejto sústavy je rovný hodnosti $n = \mathrm{h}(A) = 4$, z toho vyplýva, že sústava má práve jedno riešenie. Teda $\overline{x} = (0,0,0,0)^\top$. ♡

Príklad 2.4.2 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme homogénnu sústavu lineárnych algebraických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu sústavy na stupňovitý tvar. Keďže počet rovníc je menší než počet neznámych, môžeme hneď na začiatku vidieť, že sústava bude mať aj netriviálne riešenia, teda nekonečne veľa riešení.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Počet neznámych tejto sústavy je väčší ako hodnosť $n = 5 > \mathrm{h}(A) = 2$, z toho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení. Počet voľných premenných bude rovný číslu $n - \mathrm{h}(A) = 5 - 2 = 3$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Vzhľadom na druhú rovnicu vyberieme z trojice x_3, x_4, x_5 nanajvýš dve voľné premenné. Výhodné je zobrať práve dve premenné. Z dvojice x_1, x_2 zvolíme poslednú voľnú premennú. Nech $x_3 = t$, $x_5 = u$ a $x_1 = s$, tak z druhej rovnice dostávame

$$2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \ \Rightarrow x_4 = 3u - 2t.$$

Nakoniec dosadíme vypočítané hodnoty do prvej rovnice a určíme x_2

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \ \Rightarrow x_2 = 3s - 4t + 11u.$$

Riešením sústavy je vektor $\overline{x} = (s, 3s-4t+11u, t, 3u-2t, u)^\top$ pre $s, t, u \in \mathbb{R}$. ♡

Poznámka. Ak je matica homogénnej sústavy štvorcová, môžeme spočítať determinant matice sústavy. Ak je determinant rôzny od nuly, sústava má len triviálne riešenie. Ak je determinant rovný nule, má sústava nekonečne veľa riešení a tie nájdeme Gaussovou eliminačnou metódou.

Úlohy:

2.4 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte homogénnu sústavu lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 17x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 26x_3 & + & 22x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & - & x_6 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & & & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & - & x_5 & & & = & 0 \\ -x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & = & 0 \\ & & & - & x_3 & & & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 0 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & & & - & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 10x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & - & 13x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 12x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 15x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 13x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Výsledky:

2.4

a) $\overline{x} = (4t, t, -5t)^\top \ t \in \mathbb{R}$

b) $\overline{x} = (-\frac{11}{7}\,t, -\frac{1}{7}\,t, t)^\top \ t \in \mathbb{R}$

c) $\overline{x} = (8s-7t, 5t-6s, s, t)^\top \ s, t \in \mathbb{R}$

d) $\overline{x} = (8s-7t, 5t-6s, s, t)^\top \ s, t \in \mathbb{R}$

e) $\overline{x} = (t, t-s, t, s, t, 0)^\top \ s, t \in \mathbb{R}$

f) $\overline{x} = (0, 0, t, 0, t, 0)^\top \ t \in \mathbb{R}$

g) $\overline{x} = (\frac{t+s}{3}, \frac{2t-5s}{3}, t, s, 0)^\top \ s, t \in \mathbb{R}$

h) $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 0)^\top$

2.5 Sústava lineárnych rovníc s parametrom

Príklad 2.5.1 *Pomocou Cramerovho pravidla riešme nad $\mathbb{R}$ sústavu lineárnych algebraických rovníc s parametrom*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Pod riešením sústavy s parametrom sa myslí úplná diskusia riešiteľnosti vzhľadom na $a \in \mathbb{R}$. Parameter sa nachádza v matici sústavy, ktorá je štvorcová, preto je výhodné použiť Cramerovo pravidlo.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2.$$

Riešiteľnosť sústavy závisí od hodnoty determinantu. To vedie ku riešeniu algebraickej rovnice

$-a^3 + 3a - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; -a^3 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0.$

Môžu nastať tri prípady.

I. Nech $a \neq 1$ a $a \neq -2$. Determinant matice sústavy je vtedy rôzny od nuly a sústava má práve jedno riešenie, ktoré nájdeme pomocou Cramerovho pravidla. Nahradením prvého stĺpca stĺpcom pravých strán dostaneme determinant D_1. Analogicky vypočítame D_2 a D_3.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2.$$

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2},$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2}.$$

II. Nech $a = 1$. Determinant matice sústavy je vtedy rovný nule a sústava má buď nekonečne veľa riešení alebo nemá riešenie. To zistíme, keď dosadíme $a = 1$ do sústavy a pomocou Gaussovej eliminácie vyriešime. V tomto prípade vidíme, že všetky tri rovnice majú tvar

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Keďže hodnosť matice sústavy je rovná hodnosti rozšírenej matici sústavy $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A^\star) = 1$, sústava má riešenie. Navyše $n = 3 > \mathrm{h}(A) = 1$, z čoho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení a počet voľných premenných je rovný $n - \mathrm{h}(A) = 3 - 1 = 2$. Nech $x_2 = s$ a $x_3 = t$, tak $x_1 = 1 - s - t$ pre $s, t \in \mathbb{R}$. Riešením je vektor $\overline{x} = (1 - s - t, s, t)^\top$, $s, t \in \mathbb{R}$.
III. Nech $a = -2$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade je determinant matice sústavy rovný nule a sústava má buď nekonečne veľa riešení alebo nemá riešenie. To zistíme, keď dosadíme $a = -2$ do sústavy a pomocou Gaussovej eliminácie vyriešime. Teda riešime nasledujúcu sústavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Pomocou ekvivalentných riadkových operácií upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ +2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa nerovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(A) = 2 \neq \mathrm{h}(A^\star) = 3$, sústava nemá riešenie. ♡

Príklad 2.5.2 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme nad* $\mathbb{R}$ *sústavu lineárnych algebraických rovníc s parametrom*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 12x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 3+a \\ 11x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 24x_4 & = & 1+a \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \end{array}.$$

Riešenie. Parameter sa v tejto sústave nachádza len vo vektore pravých strán, preto nie je výhodné, na rozdiel od predchádzajúceho príkladu, počítať determinant matice sústavy. Pomocou Gaussovej eliminácie upravíme na stupňovitý tvar rozšírenú maticu sústavy.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 12 & -6 & 9 & 21 & 3+a \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -11R_1 \\ -7R_1 \\ -8R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a-21 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a-14 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \leftrightarrows \\ \\ \leftrightarrows \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a-14 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a-21 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ -2R_2 \\ -3R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right].$$

Hodnosť matice sústavy $\mathrm{h}(A) = 2$. Hodnosť rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(A^\star)$ závisí na hodnote a. Môžu nastať dva prípady.
I. Nech $a = 0$. Hodnosť rozšírenej matice je rovná hodnosti matice sústavy $\mathrm{h}(A) = 2 = \mathrm{h}(A^\star)$, z toho vyplýva, že sústava má riešenie. Navyše platí $n = 4 > \mathrm{h}(A) = 2$, z čoho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení a počet voľných premenných je rovný $n - \mathrm{h}(A) = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 19x_4 & = & -7 \end{array}.$$

Vzhľadom na druhú rovnicu vyberieme z trojice x_2, x_3, x_4 nanajvýš dve voľné premenné. Výhodné je zobrať práve dve premenné. Nech $x_3 = s$ a $x_4 = t$, tak z druhej rovnice dostávame

$$2x_2 + 7x_3 + 19x_4 = -7 \ \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t).$$

Nakoniec dosadíme vypočítané hodnoty do prvej rovnice a určíme x_1

$$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \ \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t).$$

Riešením sústavy je vektor $\overline{x} = (\frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t), \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t), s, t)^\top$ pre $s, t \in \mathbb{R}$.
II. Nech $a \neq 0$. Hodnosť rozšírenej matice sa nerovná hodnosti matice sústavy $\mathrm{h}(A) = 2 \neq \mathrm{h}(A^\star) = 3$. Z toho vyplýva, že sústava nemá riešenie. ♡

Úlohy:

2.5 Riešte nad $\mathbb{R}$ sústavu lineárnych algebraických rovníc s parametrom

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 6 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a^2 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & a \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 11 \\ 5x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & a \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 11 \\ 5x_1 & & & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & a \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 22x_4 & = & 9 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & a \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcl} (2-a)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (a-2)x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a-2)x_3 & = & 0 \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 6 \\ -7x_1 & & & + & 7x_3 & = & 8-a \end{array}$$

j)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a^2 \end{array}$$

k)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 1+a \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2ax_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -a^2x_1 & - & x_2 & + & (1-a)x_3 & = & 0 \end{array}$$

n)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a\ . \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \end{array}$$

Výsledky:

2.5

a) $a \neq 1 \Rightarrow \overline{x} = (\frac{3a-4}{a-1}, \frac{3-a}{a-1}, -\frac{1}{a-1})^\top$
$a = 1 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

b) $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \Rightarrow \overline{x} = (-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2})^\top$
$a = 1 \Rightarrow \overline{x} = (t, s, 1-s-t)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a = -2 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

c) $a = 5 \Rightarrow \overline{x} = (1 - \frac{5}{3}t - \frac{1}{3}s, s, -1+\frac{7}{3}t, t)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a \neq 5 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

d) $a = 11 \Rightarrow \overline{x} = (\frac{8-5t}{3}, \frac{5-3t}{2}, t, \frac{13t-7}{6})^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq 11 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

e) $a = 12 \Rightarrow \overline{x} = (3-2t, 2-t, t, -1+2t)^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq 12 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

f) $a = 0 \Rightarrow \overline{x} = (\frac{-3-5t-13s}{2}, \frac{-7-7t-19s}{2}, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a \neq 0 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

g) $a = 2 \Rightarrow \overline{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + s + t, s, t)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a \neq 2 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

h) $a = 3 \Rightarrow \overline{x} = (0, -t, t)^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq 3 \Rightarrow \overline{x} = (0, 0, 0)^\top$

i) $a = 64 \Rightarrow \overline{x} = (8+t, -2-2t, t)^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq 64 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

j) $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \Rightarrow \overline{x} = (-\frac{a}{a+2}, -\frac{a}{a+2}, 1)^\top$
$a = 1 \Rightarrow \overline{x} = (1-s-t, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a = -2 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

k) $a = 5 \Rightarrow \overline{x} = (t-4, \frac{11}{2} - 2t, t)^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq 5 \Rightarrow$ sústava nemá riešenie

l) $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \Rightarrow \overline{x} = (0, 0, 0)^\top$
$a = 1 \Rightarrow \overline{x} = (-s-t, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a = -2 \Rightarrow \overline{x} = (t, t, t)^\top \; t \in \mathbb{R}$

m) $a = \frac{3}{7} \Rightarrow \overline{x} = (t, 3t, \frac{39}{7}t)^\top \; t \in \mathbb{R}$
$a \neq \frac{3}{7} \Rightarrow \overline{x} = (0, 0, 0)^\top$

n) $a = 1 \Rightarrow \overline{x} = (1-t-s, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$
$a \neq 1 \Rightarrow \overline{x} = (-1, 1, 1)^\top$

3 Polynómy a racionálne funkcie

3.1 Komplexné čísla

Príklad 3.1.1 *Nájdime reálne čísla* x, y *tak, aby platilo*

$$(2-4i)(-2x+5iy) = 8+34i.$$

Riešenie. Roznásobíme výrazy na ľavej strane rovnice:

$$-4x+20y+i(8x+10y) = 8+34i.$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych zložiek oboch strán rovnice dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} -4x+20y &= 8 \\ 8x+10y &= 34. \end{aligned}$$

Jej riešenie je $x = 3, y = 1$. ♡

Príklad 3.1.2 *Dané sú komplexné čísla* $z_1 = 3-4i,\ z_2 = -2+3i$. *Vypočítajme* $z_1+z_2,\ z_1.z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.

Riešenie.
$z_1+z_2 = (3-4i)+(-2+3i) = 1-i,$

$z_1.z_2 = (3-4i)(-2+3i) = -6+9i+8i-12i^2 = -6+17i+12 = 6+17i,$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-4i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-6-9i+8i-12}{4+9} = \frac{-18-i}{13} = -\frac{18}{13} - \frac{1}{13}i.$ ♡

Príklad 3.1.3 *Dané sú komplexné čísla* $u = 2-2i,\ v = -3+2i$. *Vypočítajme* $u.\overline{v},\ \frac{\overline{u}}{\overline{v}},\ \frac{u.\overline{v}}{v}$.

Riešenie. Komplexne združené čísla sú: $\overline{u} = 2+2i,\ \overline{v} = -3-2i$. Potom

$u.\overline{v} = (2-2i)(-3-2i) = -6-4i+6i-4 = -10+2i,$

$\frac{\overline{u}}{\overline{v}} = \frac{2+2i}{-3-2i} = \frac{(2+2i)(-3+2i)}{(-3-2i)(-3+2i)} = \frac{-6+4i-6i-4}{9+4} = \frac{-10-2i}{13} = -\frac{10}{13} - \frac{2}{13}i,$

$\frac{u.\overline{v}}{v} = \frac{-10+2i}{-3+2i} = \frac{(-10+2i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{30+20i-6i+4}{9+4} = \frac{34+14i}{13} = \frac{34}{13} + \frac{14}{13}i.$ ♡

Príklad 3.1.4 *Vypočítajme* $(-1+i)^7$.

Riešenie. Označme $z = -1+i$. Komplexné číslo z^7 vypočítame pomocou Moivreovej vety. Najprv napíšeme komplexné číslo z v goniometrickom tvare.
$|\, z \,| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$
potom $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Dostávame goniometrický tvar:

$$z = \sqrt{2}(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}).$$

Podľa Moivreovej vety vypočítame:
$z^7 = (-1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7(\cos 7.\frac{3\pi}{4} + i\sin 7.\frac{3\pi}{4}) = 8\sqrt{2}(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}) =$
$= 8\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 8\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -8-8i.$ ♡

Príklad 3.1.5 *Dané sú komplexné čísla* $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z_2 = -3\sqrt{3}+3i.$ *Vypočítajme:*

a) $z_3 = z_1^4.z_2^3$ b) $z_4 = \frac{z_2^4}{z_1^2}.$

Riešenie. Čísla z_1, z_2 napíšeme v goniometrickom tvare. Použijeme postup uvedený v Príklade 3.1.4. Dostaneme:
$z_1 = 2(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi),\ z_2 = 6(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi).$ Potom

a) $z_3 = 2^4(\cos 7\pi + i\sin 7\pi).6^3(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 2^4.6^3(\cos(7\pi+\frac{5\pi}{2}) +$

$+ i\sin(7\pi + \frac{5\pi}{2})) = 2^4.6^3(\cos\frac{19\pi}{2} + i\sin\frac{19\pi}{2}) = 3456(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) =$

$= -3456i$

b) $z_4 = \dfrac{6^4.(\cos\frac{20}{6}\pi + i\sin\frac{20}{6}\pi)}{2^2.(\cos\frac{7}{2}\pi + i\sin\frac{7}{2}\pi)} = 324(\cos(\frac{10}{3}\pi - \frac{7}{2}\pi) + i\sin(\frac{10}{3}\pi - \frac{7}{2}\pi)) =$
$= 324(\cos(-\frac{1}{6}\pi) + i\sin(-\frac{1}{6}\pi)) = 324(\cos\frac{1}{6}\pi - i\sin\frac{1}{6}\pi) = 324(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) =$

$= 162\sqrt{3} - 162i.$ ♡

Príklad 3.1.6 *Riešme binomickú rovnicu* $z^4 + 1 = 0.$

Riešenie. Riešenia binomickej rovnice $z^n = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ majú tvar

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}),\ k = 1, 2, ..., n-1.$$

V našom príklade $|a| = |-1| = 1,\ \alpha = \pi,\ n = 4,$ teda riešenia binomickej rovnice nájdeme v tvare:
$z_k = \sqrt[4]{1}.\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\quad k = 0, 1, 2, 3.$ Dostávame

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_1 &= \cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= \cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_4 &= \cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

♡

Úlohy:

3.1 Nájdite reálne čísla x, y tak, aby platilo:

a) $(3-2i)x+(5-7i)y=1-3i$

b) $(1-i)x+(4+2i)y=1+3i$

c) $(1+3i)(2x+iy)=1+i$

d) $\frac{x+iy}{1-i}=3+2i$

e) $(2+ix)(y+2i)=16-11i$.

3.2 Vypočítajte v algebraickom tvare:

a) $(2+4i)+(1+2i)$

b) $(-2-i)-(4-6i)$

c) $-3(-5+4i)+5(6-3i)$

d) $(3+2i)(2+i)$

e) $(2+3i)(4+5i)$

f) $(2-i)(2+i)+(3-i)(4+2i)$

g) $\frac{2+i}{3-i}$

h) $\left(\frac{1+2i}{3-i}\right)^2$

i) $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1+i}{1+i}$

j) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$

k) $\frac{(1-i)^2(\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}}$.

3.3 Zjednodušte a vypočítajte:

a) $i^{16}; i^{29}; i^{133}; i^{-6}; i^{-11}$

b) $3-8i+3i^2+3i^3-6i^4$

c) $-5+4i^2-9i^6+7i^5$.

3.4 Napíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare komplexné čísla:

a) 3

b) $-2+2i\sqrt{3}$

c) $2i$

d) $1+i$

e) $\sqrt{3}-i$

f) $1-i\sqrt{3}$

g) $1-\sqrt{3}$

h) $3-3i$

i) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

3.5 V goniometrickom tvare vypočítajte súčin $u.v$ a podiel $\frac{u}{v}$, ak

a) $u=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\ v=\sqrt{8}(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$

b) $u=-1+i,\ v=3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

c) $u=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi),\ v=\sqrt{2}(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)$

d) $u=\sqrt{3}-i,\ v=2+2i$.

3.6 Pomocou Moivreovej vety vypočítajte a zapíšte v algebraickom tvare:

a) $(-1-i)^6$ b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{24}$ c) $\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{3}$.

3.7 Vypočítajte komplexné číslo $z = \frac{u.\overline{u}}{v}$, ak

a) $u = \sqrt{3}+i,\ v = 1-i$

b) $u = -\sqrt{2}+i,\ v = \sqrt{2}-i$.

3.8 Dané sú komplexné čísla $z_1 = -\sqrt{3}+i,\ z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$. Vypočítajte:

a) $z_1^3.z_2^5$ b) $z_1^5.z_2^4$ c) $\frac{z_1^6}{z_2^3}$ d) $\frac{z_2^6}{z_1^2}$.

3.9 Riešte binomické rovnice:

a) $z^2 = -1$ c) $z^4 = -16$ e) $z^6 = -729$

b) $z^3 = i$ d) $z^5 = 32$ f) $z^4 = -8+8\sqrt{3}i$.

Výsledky:

3.1

a) $x = -\frac{8}{11},\ y = \frac{7}{11}$

b) $x = -\frac{5}{3},\ y = \frac{2}{3}$

c) $x = \frac{1}{5},\ y = -\frac{1}{5}$

d) $x = 5,\ y = -1$

e) $[x,y] \in \{[-3,5],[-5,3]\}$

3.2

a) $3+6i$

b) $-6+5i$

c) $45-27i$

d) $4+7i$

e) $-7+22i$

f) $19+2i$

g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

h) $-\frac{12}{25}+\frac{7}{10}i$

i) $2i$

j) $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$

k) 2

3.3

a) $1; i; i; -1; i$ b) $-6-11i$ c) $7i$

3.4

a) $3(\cos 0 + i\sin 0);\ 3e^{0i}$

b) $4(\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi);\ 4e^{\frac{2}{3}\pi i}$

c) $2(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2});\ 2e^{\frac{\pi}{2}i}$

d) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4});\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

e) $2(\cos \frac{13}{6}\pi + i\sin \frac{13}{6}\pi);\ 2e^{\frac{13}{6}\pi i}$

f) $2(\cos \frac{5}{3}\pi + i\sin \frac{5}{3}\pi);\ 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$

g) $(1-\sqrt{3})(\cos\pi + i\sin\pi); (1-\sqrt{3})e^{\pi i}$

h) $3\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i\sin \frac{7}{4}\pi);\ 3\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$

i) $2(\cos \frac{5}{4}\pi + i\sin \frac{5}{4}\pi);\ 2e^{\frac{5}{4}\pi i}$

3.5

a) $4(\cos \frac{13}{12}\pi + i\sin \frac{13}{12}\pi);\ \frac{1}{2}(\cos \frac{17}{12}\pi + i\sin \frac{17}{12}\pi)$

b) $3\sqrt{2}(\cos \frac{13}{12}\pi + i\sin \frac{13}{12}\pi);\ \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos \frac{5}{12}\pi + i\sin \frac{5}{12}\pi)$

c) $2\sqrt{2}(\cos \frac{5}{16}\pi + i\sin \frac{5}{6}\pi);\ \sqrt{2}(\cos \frac{1}{2}\pi + i\sin \frac{1}{2}\pi)$

d) $4\sqrt{2}(\cos \frac{1}{12}\pi + i\sin \frac{1}{12}\pi);\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{19}{12}\pi + i\sin \frac{19}{12}\pi)$

3.6

a) $-8i$ b) 4096 c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

3.7

a) $z = 2 + 2i$ b) $z = \sqrt{2} + i$

3.8

a) $-16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$

b) $2^8(-\sqrt{3} - i)$

c) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

d) $8\sqrt{3} - 8i$

3.9

a) $z_0 = i,\ z_1 = -i$

b) $z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2$

c) $z_k = 2\left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin \frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3$

d) $z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

e) $z_k = 3\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

f) $z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3$

3.2 Polynómy

Príklad 3.2.1 *Vypočítajme podiel polynómov* $(x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 18x - 2) : (x^2 + 6x + 8)$.

Riešenie.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & +2x^4 & -6x^3 & & +18x & -2) & :(x^2+6x+8)=x^3-4x^2+10x-28 \\
-x^5 & -6x^4 & -8x^3 & & & & \\
\hline
 & -4x^4 & -14x^3 & & +18x & -2 & \\
 & 4x^4 & +24x^3 & +32x^2 & & & \\
\hline
 & & 10x^3 & +32x^2 & +18x & -2 & \\
 & & -10x^3 & -60x^2 & -80x & & \\
\hline
 & & & -28x^2 & -62x & -2 & \\
 & & & 28x^2 & +168x & +224 & \\
\hline
 & & & & 106x & +222 &
\end{array}
$$

Polynóm $106x + 222$ je zvyšok pri delení polynómu polynómom. Výsledok delenia môžeme zapísať aj v tvare:

$$\frac{x^5+2x^4-6x^3+18x-2}{x^2+6x+8} = x^3 - 4x^2 + 10x - 28 + \frac{106x+222}{x^2+6x+8}. \qquad \heartsuit$$

Príklad 3.2.2 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* $P(x) = 3x^5 - 8x^4 + x^2 + 12x + 4$ *nad množinou* $\mathbb{R}$.

Riešenie. Hľadáme kanonický rozklad nad poľom $\mathbb{R}$. Racionálnymi koreňmi môžu byť len čísla v tvare $\frac{p}{q}$, ktoré spĺňajú podmienky $p|4, q|3$, teda $p \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}, q \in \{\pm1, \pm3\}$. Potom možné racionálne korene sú: $\pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm4, \pm2, \pm1$. Ľahko zistíme, že číslo 1 nie je koreňom polynómu $P(x)$. Skúsme pomocou Hornerovej schémy overiť, či je koreňom číslo $x = -1$.

	3	-8	0	1	12	4
-1	3	-11	11	-10	22	|-18

Hodnota polynómu $P(x)$ v bode -1 je -18, číslo -1 teda nie je jeho koreňom. Overíme ďalšie čísla. Pre $x = -\frac{1}{3}$

	3	-8	0	1	12	4
$-\frac{1}{3}$	3	-9	3	0	12	|0

Keďže $P(-\frac{1}{3}) = 0$, číslo $-\frac{1}{3}$ je koreňom polynómu $P(x)$. Druhý riadok Hornerovej schémy nám zároveň určuje koeficienty polynómu, ktorý vznikne delením polynómu $P(x)$ koreňovým činiteľom $x + \frac{1}{3}$. Dostávame $P(x) = (x + \frac{1}{3})(3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 12)$. Pokračujeme v Hornerovej schéme pre polynóm $3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 12$. Ak získame koreň, môžeme hneď pokračovať v Hornerovej schéme pre polynóm s novými koeficientami. Vezmime napríklad $x = 2$. Dostávame:

	3	-9	3	0	12
2	3	-3	-3	-6	|0
2	3	3	3	|0	

Číslo 2 je dvojnásobným koreňom a pretože polynóm $3x^2 + 3x + 3$ nemá reálne korene, hľadaný kanonický rozklad polynómu $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ je:
$P(x) = (x + \frac{1}{3})(x-2)^2(3x^2 + 3x + 3) = 3(x + \frac{1}{3})(x-2)^2(x^2 + x + 1)$. ♡

Príklad 3.2.3 *Rozložme polynóm $P(x) = x^4 + 1$ nad množinou $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Z riešenia Príkladu 3.1.6 vyplýva rozklad nad množinou $\mathbb{C}$:
$P(x) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Rozklad nad množinou reálnych čísel dostaneme vhodným združením činiteľov:
$P(x) = [(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})][(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})] =$
$= [(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt{2}}{2})^2][(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt{2}}{2})^2] = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
Tento rozklad môžeme získať aj úpravami:

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x).$$

♡

Príklad 3.2.4 *Nájdime kanonický rozklad polynómu $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ nad množinami $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.*

Riešenie. Je zrejmé, že polynóm $P(x)$ nemá reálne korene. Komplexné korene nájdeme tak, že vyriešime rovnicu $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Po zavedení substitúcie $x^2 = t$ dostávame kvadratickú rovnicu $t^2 + t + 1 = 0$. Jej korene sú: $t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Koreňmi polynómu $P(x)$ sú potom korene binomických rovníc $x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Binomické rovnice vyriešime postupom uvedeným v Príklade 3.1.6. Riešenia rovnice $x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sú $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, riešenia rovnice $x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sú $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Z toho dostávame rozklad polynómu $P(x)$ nad množinou $\mathbb{C}$:

$$P(x) = (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Rozklad nad množinou $\mathbb{R}$ získame vhodným vynásobením prvého a štvrtého člena rozkladu a druhého a tretieho člena rozkladu. Dostávame:

$P(x) = [(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)][(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)] =$
$= [(x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2][(x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2] = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

Rozklad môžeme získať aj úpravami obdobne ako v predchádzajúcom príklade. ♡

Príklad 3.2.5 *Nájdime kanonický rozklad polynómu $Q(x) = x^6 - 7x^3 - 8$ nad množinou $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Zavedieme substitúciu $x^3 = t$. Dostávame
$Q(x) = t^2 - 7t - 8 = (t - 8)(t + 1) = (x^3 - 8)(x^3 + 1).$
Použitím vzorca $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$ dostávame kanonický rozklad polynómu $Q(x)$ nad $\mathbb{R}$:
$Q(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1).$ ♡

Príklad 3.2.6 *Nájdime všetky korene a ich násobnosti algebraickej rovnice $x^7 - 7x^6 + x^5 - 7x^4 - x^3 + 7x^2 - x + 7 = 0$, ak vieme , že číslo i je jej dvojnásobný koreň.*

Riešenie. Ak komplexné číslo i je koreňom, potom aj k nemu komplexne združené číslo -i je koreňom rovnice. Potom polynóm rovnice sa rovná
$P(x) = x^7 - 7x^6 + x^5 - 7x^4 - x^3 + 7x^2 - x + 7 = (x - i)^2(x + i)^2.Q(x) =$
$= (x^4 + 2x^2 + 1).Q(x).$
Polynóm $Q(x)$ vypočítame ako podiel polynómu $P(x)$ a polynómu $x^4 + 2x^2 + 1$. Dostaneme $Q(x) = x^3 - 7x^2 - x + 7$. Korene polynómu $Q(x)$ môžeme získať pomocou Hornerovej schémy, ale tiež vhodným vyberaním pred zátvorku :
$Q(x) = x^3 - 7x^2 - x + 7 = x^2(x - 7) - (x - 7) = (x - 7)(x^2 - 1) =$
$= (x - 7)(x - 1)(x + 1).$
Korene algebraickej rovnice potom sú: $\pm i$, ± 1, 7. Všetky reálne korene sú jednoduché (jednonásobné). ♡

Príklad 3.2.7 *Nájdime polynóm najnižšieho stupňa s reálnymi koeficientami, ktorý má dvojnásobný koreň i a jednoduchý koreň $-1 - i$.*

Riešenie. Polynóm získame ako súčin koreňových činiteľov. Pritom si musíme uvedomiť, že číslo $-i$ je tiež dvojnásobným koreňom a číslo $-1 + i$ jednoduchým koreňom polynómu s reálnymi koeficientami. Hľadaný polynóm je ľubovoľným nenulovým číselným násobkom polynómu:
$P(x) = (x - i)^2(x + i)^2(x + 1 + i)(x + 1 - i) = [(x + i)(x - i)]^2[(x + 1)^2 - i^2] =$
$= (x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 1 + 1) = (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) =$
$= x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2.$ ♡

Príklad 3.2.8 *Nájdime číslo* a *tak, aby číslo 1 bolo koreňom polynómu* $P(x) = ax^6 - ax^5 + 13x^4 - (3a+2)x^3 - 11x^2 + 8x + a.$

Riešenie. Uvedieme 2 spôsoby riešenia príkladu.
I. Urobíme Hornerovu schému :

	a	$-a$	13	$-3a-2$	-11	8	a
1	a	0	13	$-3a+11$	$-3a$	$-3a+8$	$\vert -2a+8$

Z Hornerovej schémy vyplýva, že číslo 1 je koreňom polynómu *P(x)*, ak platí $-2a+8=0$, t.j. $a=4$. Aby sme zistili násobnosť koreňa $x=1$, dosadíme do druhého riadku $a=4$ a pokračujeme v Hornerovej schéme. Dostávame:

	4	0	13	-1	-12	-4
1	4	4	17	16	4	$\vert 0$
1	4	8	25	41	$\vert 45$	

Vidíme, že číslo 1 je dvojnásobným koreňom polynómu $P(x)$.
II. Musí platiť $P(1)=0$, t.j.
$a - a + 13 - (3a+2) - 11 + 8 + a = 0 \Rightarrow a = 4.$
Násobnosť koreňa by sme po dosadení $a=4$ do polynómu zistili pomocou Hornerovej schémy obdobne ako v uvedenom postupe I. ♡

Úlohy:

3.11 Vypočítajte podiel polynómov:

a) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2)$

b) $(2x^6 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 5) : (x^4 - x^2 - 2x + 2)$

c) $(x^6 + 7x^5 - 6x^2 + 4x - 5) : (x^4 + 4x^2 + 4)$.

3.12 Nájdite všetky korene rovnice $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 18x - 45 = 0$, ak viete, že číslo $1-2i$ je jej jednoduchý koreň.

3.13 Nad množinou $\mathbb{C}$ riešte rovnicu
$4x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 71x^2 + 16x - 20 = 0$, ak viete, že číslo $2+i$ je jej koreňom.

3.14 Určte číslo a tak, aby

a) číslo -2 bolo koreňom polynómu $Q(x) = x^5 + 7x^4 + ax^3 + 8x^2 - ax - a$

b) číslo 3 bolo koreňom polynómu
$P(x) = 4x^6 - 2ax^5 + (5a-5)x^4 - 5ax^3 + 5ax^2 - 42x + 9.$

a zistite násobnosť týchto koreňov.

3.15 Nájdite polynóm najnižšieho stupňa s reálnymi koeficientami, ktorý má

a) dvojnásobný koreň $-2i$ a jednoduchý koreň $1+i$

b) jednoduché korene $-i;\ -1-i;\ 2+i$

c) trojnásobný koreň $2i$ a jednoduchý koreň $3-i$

d) trojnásobný koreň 2 a jednoduchý koreň $1-i$.

3.16 Rozložte dané polynómy na kanonický tvar nad množinou $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 5x^2 - 8x - 12$

b) $x^4 - x^3 - x + 1$

c) $4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1$

d) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

e) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

f) $4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

g) $x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 8x + 4$

h) $x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x + 9$

i) $4x^5 - 17x^4 + 24x^3 - 13x^2 + 2x$

j) $3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$

k) $3x^5 - 7x^4 + 5x^3 - x^2$

l) $2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$

m) $5x^5 + 32x^4 + 72x^3 + 64x^2 + 16x$

n) $3x^5 - 5x^4 + 7x^2 - 9x + 4$

o) $2x^5 + 11x^4 + 22x^3 + 18x^2 - 8$

p) $5x^5 - 43x^4 + 117x^3 - 81x^2 - 54x$

q) $5x^5 - 3x^4 - 52x^3 + 128x + 48$

r) $2x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 9$

s) $3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 8$

t) $2x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 20x^2$

u) $3x^5 - 28x^4 + 54x^3 + 60x^2 - 25x$

v) $3x^8 - 5x^7 - 2x^6 + 81x^2 - 135x - 54$

w) $3x^5 + 20x^4 + 48x^3 + 48x^2 + 16x$

x) $2x^5 - 9x^4 - 2x^3 + 36x^2 - 27$

y) $2x^5 - 3x^4 - x^3 - 19x - 15$

z) $5x^8 - 28x^7 + 15x^6 - 5x^2 + 28x - 15$.

3.17 Rozložte dané polynómy nad množinami $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$

a) $x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 4$

b) $x^5 - x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 9x - 9$

c) $x^7 + 12x^5 + 48x^3 + 64x$

d) $5x^8 - 28x^7 + 15x^6 - 5x^2 + 28x - 15$

e) $4x^8 - 7x^7 + 3x^6 - 4x^2 + 7x - 3$

f) $4x^8 + 7x^7 + 3x^6 + 108x^2 + 189x + 81$

g) $2x^5 + 3x^4 - 26x^2 - 50x - 25$

h) $2x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 54x - 27$

i) $3x^5 + 5x^4 - 7x^2 - 9x - 4$

j) $2x^5 - 7x^4 - 3x^3 + 27x + 81$.

Výsledky:

3.11

a) Podiel: $x + 1$, zvyšok: $2x - 3$

b) Podiel: $2x^2 + 1$, zvyšok: $2x^2 + 3$

c) Podiel: $x^2 + 7x - 4$, zvyšok: $-28x^3 + 6x^2 - 24x + 11$

3.12 $1 \pm 2i$; ± 3

3.13 $\pm\frac{1}{2}$; $\pm 2i$; $2 \pm i$

3.14

a) $a = 16$; dvojnásobný koreň

b) $a = 14$; dvojnásobný koreň

3.15 Ľubovoľný nenulový číselný násobok polynómu:

a) $P(x) = x^6 - 2x^5 + 10x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 32x + 32$

b) $P(x) = x^6 - 2x^5 + 9x^2 + 2x + 10$

c) $P(x) = x^8 - 6x^7 + 22x^6 - 72x^5 + 168x^4 - 288x^3 + 544x^2 - 384x + 640$

d) $P(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 16$

3.16

a) $(x+2)(x-3)(x^2+x+2)$

b) $(x-1)^2(x^2+x+1)$

c) $(2x-1)^2(x^2-x+1)$

d) $(x-2)^2(x-3)(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x-2)(x-3)$

f) $(2x-1)(2x^2+1)$

g) $(x-1)^2(x^2+1)(x^2+4)$

h) $(x+1)^2(x^2+3)^2$

i) $4(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-2)x$

j) $3(x-\frac{1}{3})(x+4)^2(x-2)x$

k) $3(x-\frac{1}{3})(x-1)^2x^2$

l) $2(x-\frac{3}{2})(x+3)^2(x^2+3)$

m) $5(x+\frac{2}{5})(x+2)^3x$

n) $3(x+\frac{4}{3})(x-1)^2(x^2-x+1)$

o) $2(x-\frac{1}{2})(x+2)^2(x^2+2x+2)$

p) $5(x+\frac{2}{5})(x-3)^3x$

q) $5(x+\frac{2}{5})(x+2)^2(x-3)(x-2)$

r) $2(x-\frac{3}{2})(x+1)^2(x-3)(x-1)$

s) $3(x+\frac{2}{3})(x-1)^2(x^2+2x+4)$

t) $2(x-\frac{5}{2})(x+2)^2x^2$

u) $3(x-\frac{1}{3})(x-5)^2(x+1)x$

v) $3(x+\frac{1}{3})(x-2)(x^2+3x+3)$
$(x^2-3x+3)(x^2+3)$

w) $3(x+\frac{2}{3})(x+2)^3x$

x) $2(x+\frac{3}{2})(x-3)^2(x+1)(x-1)$

y) $2(x-\frac{5}{2})(x+1)^2(x^2-x+3)$

z) $5(x-\frac{3}{5})(x-5)$
$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)(x-1)$

3.17

a) $(x^2+1)^2(x^2+4)$; $(x+i)^2(x-i)^2(x+2i)(x-2i)$

b) $(x-1)(x^2+1)(x^2+9)$; $(x-1)(x+i)(x-i)(x+3i)(x-3i)$

c) $x(x^2+4)^3$; $x(x+2i)^3(x-2i)^3$

d) $5(x-\frac{3}{5})(x-5)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)(x-1)$;
$(5x-3)(x-5)(x+1)(x-1)(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$
$(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

e) $4(x-\frac{3}{4})(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)$;
$(4x-3)(x-1)^2(x+1)(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

f) $4(x+\frac{3}{4})(x+1)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)(x^2+3)$;
$(4x+3)(x+1)(x+3i)(x-3i)(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$
$(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

g) $2(x-\frac{5}{2})(x+1)^2(x^2+2x+5)$; $(2x-5)(x+1)^2(x+1+2i)(x+1-2i)$

h) $2(x-\frac{1}{2})(x-3)^2(x^2+2x+3)$; $(2x-1)(x-3)^2(x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$

i) $3(x-\frac{4}{3})(x+1)^2(x^2+x+1)$; $(3x-4)(x+1)^2(x+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

j) $2(x+\frac{3}{2})(x-3)^2(x^2+x+3)$; $(2x+3)(x-3)^2(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i)$

3.3 Racionálne funkcie

Príklad 3.3.1 *Bez výpočtu koeficientov určme rozklad funkcie* $R(x)=\frac{x^3-6}{(x^2-x+1)^2(x^2+4)(x+1)^4(x-2)}$ *na reálne parciálne zlomky.*

Riešenie. Daná funkcia je rýdzoracionálna a teda ju môžeme rozložiť na parciálne zlomky. Polynóm $(x^2-x+1)^2$ má dvojicu komplexne združených dvojnásobných koreňov, takže mu prislúchajú parciálne zlomky $\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}$, $\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}$. Polynóm x^2+4 má dvojicu komplexne združených jednoduchých koreňov, prislúcha mu parciálny zlomok $\frac{Ex+F}{x^2+4}$. Polynóm $(x+1)^4$ má štvornásobný reálny koreň -4, prislúchajú mu parciálne zlomky $\frac{G}{(x+1)^4}$, $\frac{H}{(x+1)^3}$, $\frac{I}{(x+1)^2}$, $\frac{J}{x+1}$. Polynóm $x-2$ má jednoduchý reálny koreň 2, prislúcha mu parciálny zlomok $\frac{K}{x-2}$. Rozklad na reálne parciálne zlomky bude mať tvar:
$$\frac{x^3-6}{(x^2-x+1)^2(x^2+4)(x+1)^4(x-2)}=\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+4}+\frac{G}{(x+1)^4}+$$
$$+\frac{H}{(x+1)^3}+\frac{I}{(x+1)^2}+\frac{J}{x+1}+\frac{K}{x-2}.$$ ♡

Príklad 3.3.2 *Rozložme funkciu* $F(x) = \frac{x^3-2}{x^4+x^3+x+1}$ *na parciálne zlomky nad množinou* $\mathbb{R}$.

Riešenie. Rozložíme menovateľa na kanonický tvar nad $\mathbb{R}$. Dostaneme $x^4+x^3+x+1 = (x+1)^2(x^2-x+1)$. Funkcia F je rýdzoracionálna a teda rozklad na parciálne zlomky bude mať tvar:

$$\frac{x^3-2}{x^4+x^3+x+1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Po vynásobení spoločným menovateľom získame rovnosť:
$x^3-2 = A(x^2-x+1) + B(x+1)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2$.
Na výpočet koeficientov A,B,C,D použijeme dosadzovaciu metódu:

$$\begin{aligned}
x=-1: \quad -3 &= A(1+1+1)\\
A &= -1\\
x=0: \quad -2 &= A+B+C\\
-1 &= B+D\\
x=1: \quad -1 &= A+2B+4C+4D\\
0 &= B+2C+2D\\
x=2: \quad 6 &= 3A+9B+18C+9D\\
1 &= B+2C+D.
\end{aligned}$$

Z posledných troch dosadení dostávame sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi B,C,D, ktorej riešenie je $B=0$, $C=1$, $D=-1$. Rozklad funkcie F na parciálne zlomky nad $\mathbb{R}$ je teda:

$$\frac{x^3-2}{x^4+x^3+x+1} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2-x+1}.$$

♡

Príklad 3.3.3 *Rozložme funkciu* $F(x) = \frac{x^6+7x^5-6x^2+4x-5}{x^4+4x^2+4}$ *na parciálne zlomky nad množinou* $\mathbb{R}$.

Riešenie. Keďže stupeň čitateľa je väčší ako stupeň menovateľa, funkcia F nie je rýdzoracionálna, a preto ju musíme zapísať ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Vydelíme čitateľa menovateľom tak, ako sme to ukázali v Príklade 3.2.1. Dostávame:

$$\frac{x^6+7x^5-6x^2+4x-5}{x^4+4x^2+4} = x^2+7x-4+\frac{-28x^3+6x^2-24x+11}{x^4+4x^2+4}.$$

Ďalej upravíme menovateľa: $x^4+4x^2+4 = (x^2+2)^2$. Rozklad rýdzoracionálnej funkcie na reálne parciálne zlomky bude mať tvar:

$$\frac{-28x^3+6x^2-24x+11}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Po vynásobení spoločným menovateľom dostaneme:
$-28x^3 + 6x^2 - 24x + 11 = Ax + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D$
$-28x^3 + 6x^2 - 24x + 11 = Cx^3 + Dx^2 + (A + 2C)x + B + 2D.$
Použijeme porovnávaciu metódu:

$$\begin{array}{rrl} x^3: & -28 = & C \\ x^2: & 6 = & D \\ x^1: & -24 = & A + 2C \\ & 32 = & A \\ x^0: & 11 = & B + 2D \\ & -1 = & B. \end{array}$$

Rozklad funkcie F na reálne parciálne zlomky je potom:

$$\frac{x^6 + 7x^5 - 6x^2 + 4x - 5}{(x^2 + 2)^2} = x^2 + 7x - 4 + \frac{32x - 1}{(x^2 + 2)^2} + \frac{-28x + 6}{x^2 + 2}.$$

♡

Príklad 3.3.4 *Rozložme funkciu* $F(x) = \frac{x^3(4-i)+x^2(5i-5)+x(2i+7)+2i-8}{(x^2+1)(x^2+4)}$ *na parciálne zlomky nad* $\mathbb{C}$.

Riešenie. Rozklad menovateľa nad $\mathbb{C}$ je
$(x^2 + 1)(x^2 + 4) = (x + i)(x - i)(x + 2i)(x - 2i).$
Potom rozklad funkcie F nad $\mathbb{C}$ nájdeme v tvare:

$$\frac{x^3(4 - i) + x^2(5i - 5) + x(2i + 7) + 2i - 8}{(x - i)(x + i)(x + 2i)(x - 2i)} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i} + \frac{C}{x + 2i} + \frac{D}{x - 2i}$$

Koeficienty A,B,C,D vypočítame zakrývacou metódou:

$A = \frac{-i(4-i)-(5i-5)+i(2i+7)+2i-8}{2i..3i.(-i)} = \frac{-6}{6i} = i$

$B = \frac{i(4-i)-(5i-5)-i(2i+7)+2i-8}{-2i.i.(-3i)} = \frac{-6i}{-6i} = 1$

$C = \frac{8i(4-i)-4(5i-5)-2i(2i+7)+2i-8}{-3i(-i)(-4i)} = \frac{24}{12i} = -2i$

$D = \frac{-8i(4-i)-4(5i-5)+2i(2i+7)+2i-8}{i.3i.4i} = \frac{-36i}{-12i} = 3.$

Rozklad funkcie F na parciálne zlomky nad $\mathbb{C}$ je:

$$\frac{x^3(4 - i)x^2(5i - 5) + x(2i + 7) + 2i - 8}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{i}{x - i} + \frac{1}{x + i} - \frac{2i}{x + 2i} + \frac{3}{x - 2i}.$$

♡

Úlohy:

3.18 Dané racionálne funkcie rozložte na súčet reálnych parciálnych zlomkov:

a) $\frac{4x^2+7x+2}{x^3+2x^2}$

b) $\frac{7x^4-23x^3+58x^2-63x+37}{x^4-4x^3+10x^2-12x+5}$

c) $\frac{6x^4-12x^3-11x^2+17x+4}{x^3-2x^2-x+2}$

d) $\frac{2x^6-8x^5+19x^4-55x^3+42x^2-47x+5}{x^5-x^4+7x^3-7x^2+6x-6}$

e) $\frac{3x^5-15x^4+21x^3+4x^2-28x+12}{x^4-5x^3+8x^2-4x}$

f) $\frac{-x^4+5x^3-6x^2+3x+7}{x^5+2x^2-x-2}$

g) $\frac{3x^3+4x^2-26x-36}{x^4+3x^3-2x^2-12x-8}$

h) $\frac{-5x^3+2x^2-15x+17}{x^4+7x^2+6}$

i) $\frac{-x^2+x+2}{x^4+2x^2+1}$

j) $\frac{-2x^3-6}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$

k) $\frac{3x^5+6x^4+15x^3+21x^2+16x+16}{x^5+x^4+4x^3+4x^2+4x+4}$

l) $\frac{6}{x^6-1}$

m) $\frac{7x^5+14x^4+41x^3+72x^2+20x-6}{x^4+2x^3+6x^2+10x+5}$

n) $\frac{7x^4+41x^3+90x^2+88x+26}{x^4+5x^3+11x^2+11x+4}$

o) $\frac{x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$

p) $\frac{x^3+10x^2+21x+15}{x^4+5x^3+10x^2+9x+3}$

q) $\frac{-x^3-6x-x^2-2}{x^4+8x^2+16}$

r) $\frac{5x^5+27x^4+45x^3+11x^2-26x-12}{x^5+6x^4+13x^3+12x^2+4x}$

s) $\frac{2x^4-3x^3+2x^2+4x+1}{3x^5-x^4+6x^3-2x^2+3x-1}$

t) $\frac{5x^4-7x^3+20x^2+39x+6}{2x^5+x^4+2x^3-11x^2+2x+4}$

u) $\frac{x^3-9x+2}{x^4-x^3-x+1}$

v) $\frac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$

w) $\frac{x-3}{x^4-3x^3+5x^2-5x+2}$

x) $\frac{13x^2-12x+2}{4x^4-4x^3+5x^2-4x+1}$

y) $\frac{2x^6-x^4-4x^3+5x^2-2x+5}{x^4-x^2-2x+2}$

z) $\frac{5x^4+7x^2-x+2}{x^5+2x^3+x}$

3.19 Rozložte dané funkcie na súčet komplexných parciálnych zlomkov.

a) $\frac{(3i+2)x^2+x(-3-6i)+3+3i}{x^3-3x^2+4x-2}$

b) $\frac{(4+2i)x^2+(4+5i)x+2i+7}{x^3+2x^2+x+2}$

c) $\frac{(4i-1)x^3+(5-12i)x^2+(6i-8)x+14i+4}{x^4-2x^3-2x^2+8}$

d) $\frac{5x^3-10x^2+13x-18}{x^4-2x^3+10x^2-18x+9}$

e) $\frac{2x^5+11x^4+48x^3+101x^2+180x+288}{x^5+3x^4+13x^3+39x^2+36x+108}$

f) $\frac{4x^4-8x^3+x^2+10x+1}{x^5-x^4+2x^3-10x^2+13x-5}$

g) $\frac{6x^3+22x^2+30x+4}{x^4+3x^3-2x^2-10x-12}$

h) $\frac{5x^2-14x+6}{x^4-6x^3+14x^2-16x+8}$

i) $\frac{x^4+4x^3+21x^2+74x+36}{x^5+5x^4+3x^3-15x^2-4x+10}$

j) $\frac{10x^4+14x^3-6x^2-4}{x^5+2x^4+x^3+2x^2}$

k) $\frac{3ix^3+(10+6i)x^2+(32-i)x+26-6i}{(x-i)^2(x^2+4x+5)}$

l) $\frac{x^4+(5-2i)x^2+(4-4i)x+8-2i}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

m) $\frac{x^5+2x^4+8x^3+4x^2+15x+2}{x^4+2x^2+1}$

n) $\frac{2x^3+4x^2-48x-128}{(x^2+4x+5)(x^2+4)(x+2)}$

o) $\frac{2x^5-7x^4+32x^3-14x^2+18x-71}{x^4-4x^3+12x^2+4x-13}$

p) $\frac{(-2+i)x^4+(-9i-2)x^3+(64+9i)x^2+(129i-18)x-72}{x(x^2+9)(x+i)(x+2i)}$

Výsledky:

3.18

a) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+2}$

b) $7+\frac{2x-3}{x^2-2x+5}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$

c) $6x-\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

d) $2x-6+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+6}-\frac{3}{x-1}$

e) $3x+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x}$

f) $\frac{x-1}{x^2-x+2}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-1}$

g) $-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}$

h) $\frac{-2x+3}{x^2+1}+\frac{-3x-1}{x^2+6}$

i) $-\frac{1}{x^2+1}+\frac{x+3}{(x^2+1)^2}$

j) $\frac{3}{x^2+3}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+2)^2}$

k) $3+\frac{2x+1}{x^2+2}-\frac{2}{(x^2+2)^2}+\frac{1}{x+1}$

l) $\frac{x-2}{x^2-x+1}+\frac{-x-2}{x^2+x+1}-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x-1)}$

m) $7x+\frac{2x-1}{x^2+5}-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$

n) $7+\frac{3x-2}{x^2+3x+4}+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}$

o) $x-3+\frac{3}{x-2}-\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$

p) $\frac{3}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

q) $\frac{-x-1}{x^2+4}+\frac{-2x+2}{(x^2+4)^2}$

r) $5-\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}$

s) $-\frac{1}{x^2+1}+\frac{-x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{3x-1}$

t) $\frac{3x-2}{x^2+2x+4}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x+1}$

u) $-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{x+4}{x^2+x+1}$

v) $1+\frac{3}{x-2}+\frac{4x-2}{x^2+x+3}$

w) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-x+1}{x^2-x+2}$

x) $-\frac{3}{5(2x-1)^2}+\frac{16}{25(2x-1)}+\frac{-8x+81}{25(x^2+1)}$

y) $2x^2+1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+2x+2}$

z) $\frac{2}{x}-\frac{1}{(x^2+1)^2}+\frac{3x}{x^2+1}$

3.19

a) $\frac{2}{x-1}+\frac{i}{x-1-i}+\frac{2i}{x-1+i}$

b) $\frac{1}{x-i}+\frac{2i}{x+i}+\frac{3}{x+2}$

c) $\frac{i}{(x-2)^2}+\frac{i-1}{x-i+1}+\frac{3i}{x+i+1}$

d) $\frac{2}{x+3i}+\frac{2}{x-3i}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$

e) $2+\frac{i}{x+2i}-\frac{i}{x-2i}+\frac{3}{x-3i}+\frac{3}{x+3i}-\frac{1}{x+3}$

f) $\frac{2}{x+1+2i}+\frac{2}{x+1-2i}+\frac{1}{(x-1)^3}$

g) $\frac{i}{x+1+i}-\frac{i}{x+1-i}+\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+3}$

h) $\frac{2+i}{x-1-i}+\frac{2-i}{x-1+i}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$

i) $\frac{1}{x+3-i}+\frac{1}{x+3+i}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}$

j) $\frac{4-i}{x+i}+\frac{4+i}{x-i}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$

k) $\frac{i}{x+2+i}+\frac{2i}{x+2-i}+\frac{5}{(x-i)^2}$

l) $1+\frac{i}{x+i}-\frac{2+i}{x-i}+\frac{5}{(x+1)^2}$

m) $x+2+\frac{3}{x+i}+\frac{3}{x-i}+\frac{2i}{(x+i)^2}-\frac{2i}{(x-i)^2}$

n) $\frac{3i}{x+2-i}-\frac{3i}{x+2+i}+\frac{2}{x-2i}+\frac{2}{x+2i}-\frac{4}{x+2}$

o) $2x+1+\frac{5}{x-2+3i}+\frac{5}{x-2-3i}+\frac{4}{x+1}-\frac{2}{x-1}$

p) $\frac{3}{x+2i}+\frac{i}{x+i}-\frac{5}{x+3i}-\frac{4}{x-3i}+\frac{4}{x}$

4 Vektorová algebra a analytická geometria

4.1 Geometrické vektory

Príklad 4.1.1 *Dané sú vektory* $\overline{a} = (3, 0, -1), \overline{b} = (4, 2, -3)$. *Vypočítajme skalárne súčiny* $\overline{a}.\overline{b}$, $\overline{b}.\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b}).(\overline{a} - 2\overline{b})$.

Riešenie. Podľa vzťahu pre výpočet skalárneho súčinu vypočítame:
$\overline{a}.\overline{b} = 3.4 + 0.2 + (-1).(-3) = 15,$
$\overline{b}.\overline{b} = 4.4 + 2.2 + (-3).(-3) = 29,$
$(\overline{a} + \overline{b}).(\overline{a} - 2\overline{b}) = (7, 2, -4).(-5, -4, 5) = -35 - 8 - 20 = -63.$ ♡

Príklad 4.1.2 *Vypočítajme veľkosť uhla, ktorý zvierajú vektory* $\overline{u} = (2, 0, 2\sqrt{3})$, $\overline{v} = (3, 0, 0)$.

Riešenie. Označme $\varphi = \sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$. Potom
$\cos\varphi = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{|\overline{u}|.|\overline{v}|} = \frac{6}{\sqrt{2^2+0^2+(2\sqrt{3})^2}.\sqrt{3^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$
Z toho $\varphi = \frac{\pi}{3}$. ♡

Príklad 4.1.3 *Nájdime jednotkový vektor* $\overline{n}$*, ktorý je kolmý na vektory* $\overline{a}$, $\overline{b}$, *ak* $\overline{a} = (3, 1, -2)$, $\overline{b} = (6, 2, -1)$.

Riešenie. Keďže vektor kolmý k dvom daným vektorom vieme nájsť ako vektorový súčin, jednotkový vektor $\overline{n}$ vypočítame podľa vzťahu $\overline{n} = \frac{\overline{a}\times\overline{b}}{|\overline{a}\times\overline{b}|}$.
Najprv vypočítame vektorový súčin:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\overline{i} - 9\overline{j} + 0\overline{k} = (3, -9, 0).$$

Potom $|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2 + 0^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$
$\overline{n} = \frac{3\overline{i}-9\overline{j}+0\overline{k}}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\overline{i} - \frac{3\sqrt{10}}{10}\overline{j} = \frac{\sqrt{10}}{10}(1, -3, 0).$ ♡

Príklad 4.1.4 *Dané sú vrcholy* $A = (1, 2, -4)$, $B = (3, 5, 2)$, $D = (-1, 2, 3)$ *rovnobežníka* $ABCD$. *Nájdime súradnice vrchola* C.

Riešenie. V rovnobežníku $ABCD$ musí platiť rovnosť vektorov $\overline{AB} = \overline{DC}$, t.j. $B - A = C - D$. Označme súradnice vrchola $C = (c_1, c_2, c_3)$. Potom musí platiť $(2, 3, 6) = (c_1 + 1, c_2 - 2, c_3 - 3)$. Porovnaním týchto vektorov po zložkách dostávame $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, $c_3 = 9$. Hľadaný bod je $C = (1, 5, 9)$. ♡

Príklad 4.1.5 *Vypočítajme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak* $A = (1, 4, 4),\ B = (3, 5, 3),\ C = (2, 5, 4)$.

Riešenie. Vypočítajme vektory strán trojuholníka: $\overline{u} = \overline{AB} = (2, 1, -1)$, $\overline{v} = \overline{AC} = (1, 1, 0)$, $\overline{w} = \overline{BC} = (-1, 0, 1)$. Teraz už môžeme počítať veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC:
$\cos\alpha = \cos\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{2+1+0}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$,
$\cos\gamma = \cos\sphericalangle(\overline{u}, \overline{w}) = \frac{-2+0-1}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+0+1}} = \frac{-3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{3}$.
Potom $\beta = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. ♡

Príklad 4.1.6 *Určme pri akých hodnotách* α *sú vektory* $\overline{u}, \overline{v}$ *kolmé, ak* $\overline{u} = (3\alpha - 2)\overline{i} + (\alpha^2 + 1)\overline{j} - 2\overline{k},\ \overline{v} = (\alpha + 1)\overline{i} - 2\overline{j} + (\alpha + 1)\overline{k}$.

Riešenie. Nenulové vektory $\overline{u}, \overline{v}$ sú na seba kolmé práve vtedy, ak ich skalárny súčin sa rovná nule. Vypočítame
$\overline{u}.\overline{v} = (3\alpha - 2)(\alpha + 1) - 2(\alpha^2 + 1) - 2(\alpha + 1) = \alpha^2 - \alpha - 6 = (\alpha - 3)(\alpha + 2)$.
Potom $\overline{u}.\overline{v} = 0$ práve vtedy, ak $\alpha = 3$ alebo $\alpha = -2$. ♡

Príklad 4.1.7 *Zistime, či body* A, B, C, D *ležia v jednej rovine, ak* $A = (1, 3, 5),\ B = (4, 6, 1),\ C = (2, 0, -1),\ D = (6, 12, 3)$.

Riešenie. Body A,B,C,D ležia v jednej rovine, ak tri vektory určené rôznymi dvojicami daných bodov sú lineárne závislé. Vypočítame vektory $\overline{u} = \overline{AB} = (3, 3, -4)$, $\overline{v} = \overline{AC} = (1, -3, -6)$, $\overline{w} = \overline{AD} = (5, 9, -2)$. Lineárnu závislosť resp. nezávislosť zistíme pomocou zmiešaného súčinu. Vypočítame:

$$\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 5 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Keďže $\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = 0$, vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sú lineárne závislé, čo znamená, že body A,B,C,D ležia v jednej rovine. ♡

Príklad 4.1.8 *Vypočítajme obsah rovnobežníka ABCD, ak* $A = (2, 4, 1)$, $B = (3, -1, 1),\ C = (1, 0, 5)$.

Riešenie. Vypočítame vektory $\overline{a} = \overline{AB} = (1, -5, 0)$, $\overline{b} = \overline{BC} = (-2, 1, 4)$. Pre obsah rovnobežníka platí $P = |\overline{a} \times \overline{b}|$. Vektorový súčin vypočítame postupom uvedeným v Príklade 4.1.3, dostaneme $\overline{a} \times \overline{b} = (-20, 4, -9)$. Potom $P = \sqrt{400 + 16 + 81} = \sqrt{497}$. ♡

Príklad 4.1.9 *Vypočítajme objem štvorstena $ABCD$, ak $A = (1,3,1)$, $B = (2,1,4)$, $C = (3,1,0)$, $D = (4,-3,5)$.*

Riešenie. Objem štvorstena vypočítame podľa vzorca $V = \frac{1}{6}|\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c})|$, kde $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sú vektory ľubovoľných troch susedných hrán, napr.
$\overline{a} = \overline{AB} = (1,-2,3)$, $\overline{b} = \overline{AC} = (2,-2,-1)$, $\overline{c} = \overline{AD} = (3,-6,4)$. Vypočítame zmiešaný súčin

$$\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Potom $V = \frac{1}{6}|-10| = \frac{5}{3}$. ♡

Príklad 4.1.10 *Objem štvorstena $ABCD$ je $V = 3$. Tri jeho vrcholy sú $A = (1,2,3)$, $B = (-2,4,1)$, $C = (6,2,1)$. Vypočítajme súradnice štvrtého vrchola D, ktorý leží na osi o_x.*

Riešenie. Označíme súradnice vrchola $D = (d,0,0)$. Vypočítame vektory $\overline{u}=\overline{AB}=(-3,2,-2)$, $\overline{v}=\overline{AC}=(5,0,-2)$, $\overline{w}=\overline{AD}=(d-1,-2,-3)$. Potom zmiešaný súčin sa rovná

$$\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & -2 \\ d-1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -4d + 66.$$

Po dosadení do vzťahu pre výpočet objemu štvorstena dostávame
$\frac{1}{6}|-4d+66| = 3$. Táto rovnica s absolútnou hodnotou má dve riešenia: $d_1 = 12$, $d_2 = 21$. Zadaniu príkladu vyhovujú dva body: $D_1 = (12,0,0)$, $D_2 = (21,0,0)$. ♡

Úlohy:

4.1 Dané sú body $A = (3,7,2)$, $B = (0,1,4)$, $C = (-2,-3,1)$ a vektory $\overline{a} = (1,2,1)$, $\overline{b} = (-2,0,5)$. Vypočítajte súradnice bodov, resp.vektorov:

a) $(A + \overline{b}) + \overline{a}$

b) $(C - A) + 2\overline{b} - \overline{a}$

c) $A + 2\overline{a}$

d) $(A + \overline{a} - B) - (C + \overline{b} - A)$.

4.2 Dané sú tri za sebou idúce vrcholy rovnobežníka $ABCD$. Vypočítajte súradnice vrchola D, ak:

a) $A = (1,-1,1)$, $B = (3,4,0)$, $C = (6,5,2)$

b) $A = (-3,1,5)$, $B = (2,1,4)$, $C = (1,5,6)$.

4.3 Dané sú body $A = (5, -1, -1)$, $B = (-4, 2, 5)$, $C = (-7, 8, 5)$, $D = (2, -7, 2)$. Zistite, ktoré z vektorov $\overline{a} = B - A$, $\overline{b} = C - A$, $\overline{c} = D - B$, $\overline{d} = C - D$ sú kolineárne a vyjadrite navzájom kolineárne vektory pomocou skalárneho násobku.

4.4 Určte, pre aké hodnoty α sú vektory $\overline{a}, \overline{b}$ kolmé, ak

a) $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + \alpha\overline{k}$, $\overline{b} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$

b) $\overline{a} = (\alpha^2 - 4)\overline{i} + 6\overline{j} + (2\alpha + 20)\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\alpha\overline{j} + \overline{k}$

4.5 Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak

a) $A = (6, 0, 2)$, $B = (8, -1, 4)$, $C = (4, -4, 6)$

b) $A = (1, 7, 2)$, $B = (5, -3, 3)$, $C = (12, -1, -5)$

c) $A = (-1, 2, 3)$, $B = (-2, 4, 4)$, $C = (-2, 3, 3)$.

4.6 Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak jeho tri za sebou idúce vrcholy sú

a) $A = (7, -5, 6)$, $B = (9, -4, 8)$, $C = (6, 0, 6)$

b) $A = (-2, 4, 6)$, $B = (2, 5, 4)$, $C = (1, -5, 3)$

c) $A = (2, -1, 7)$, $B = (11, -5, 8)$, $C = (7, -4, -1)$

d) $A = (-3, 1, -2)$, $B = (4, -4, 2)$, $C = (-2, 1, 0)$

e) $A = (9, -4, -4)$, $B = (11, -5, -4)$, $C = (11, 0, -9)$

f) $A = (-1, 9, 0)$, $B = (4, 5, 0)$, $C = (0, 0, 0)$.

4.7 Vypočítajte jednotkový vektor $\overline{n}$, ktorý je kolmý na vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, ak

a) $\overline{a} = (3, -2, 1)$, $\overline{b} = (2, 4, -2)$

b) $\overline{a} = (8, 4, -21)$, $\overline{b} = (8, 12, -15)$.

4.8 Dané sú vektory $\overline{a} = (1, 2, 2)$, $\overline{b} = (2, 3, 4)$, $\overline{c} = (5, 1, 3)$. Vypočítajte

a) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$

b) $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$.

4.9 Vypočítajte zmiešaný súčin $\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c})$, ak

a) $\overline{a} = (1, 3, 5)$, $\overline{b} = (2, 4, 6)$, $\overline{c} = (8, 9, 7)$

b) $\overline{a} = (2, 0, -5),\ \overline{b} = (1, -2, 1),\ \overline{c} = (-4, 3, 2)$.

4.10 Zistite, či vektory $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sú komplanárne (ležia v jednej rovine), ak

a) $\overline{a} = (-1, 2, 4),\ \overline{b} = (2, 4, 2),\ \overline{c} = (-8, -8, 2)$

b) $\overline{a} = (2, 1, 2),\ \overline{b} = (1, 2, 2),\ \overline{c} = (2, 2, 1)$.

4.11 Zistite, či body A,B,C,D sú komplanárne, ak

a) $A = (1, 0, -1),\ B = (-3, 1, -1),\ C = (2, 0, 5),\ D = (-1, 1, 11)$

b) $A = (2, 1, 4),\ B = (3, 2, 2),\ C = (-4, 5, 7),\ D = (-1, 8, 3)$.

4.12 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak

a) $A = (1, 2, 3),\ B = (-1, 0, 0),\ C = (0, -2, 0),\ D = (0, 0, -3)$

b) $A = (1, 2, -1),\ B = (3, 5, 4),\ C = (-2, 1, 0),\ D = (4, 2, 3)$.

4.13 Objem štvorstena $ABCD$ je $V = 5$. Tri jeho vrcholy sú $A = (2, 1, -1)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (2, -1, 3)$. Vypočítajte súradnice vrchola D, ktorý leží na osi o_y.

4.14 Štvorsten $ABCD$ má objem $V = 2$. Jeho tri vrcholy sú $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, 3, 2)$, $C = (1, 2, 4)$. Vypočítajte súradnice vrchola D, ktorý leží na osi o_z.

4.15 Štvorsten $ABCD$ má vrcholy $A = (-1, -5, 4)$, $B = (0, 3, 1)$, $C = (-2, -4, 3)$, $D = (-4, 4, -2)$. Vypočítajte vzdialenosť vrchola A od steny BCD.

Výsledky:

4.1

a) bod $(2, 9, 8)$

b) vektor$(-10, -12, 8)$

c) bod $(5, 11, 4)$

d) vektor $(11, 18, -5)$

4.2

a) $D = (4, 0, 3)$

b) $D = (-4, 5, 7)$

4.3 vektory $\overline{b}, \overline{c}$ sú kolineárne, $\overline{b} = -2\overline{c}$

4.4

a) $\alpha = 2$

b) $\alpha \in \{2; 8\}$

4.5

a) $\alpha = 63^0 36', \ \beta = 86^0 27', \ \gamma = 29^0 56'$

b) $\alpha = 45^0, \ \beta = 90^0, \ \gamma = 45^0$

c) $\alpha = 30^0, \ \beta = 30^0, \ \gamma = 120^0$

4.6

a) $P = 15$

b) $P = 3\sqrt{222}$

c) $P = 49\sqrt{3}$

d) $P = 15$

e) $P = 15$

f) $P = 41$

4.7

a) $\overline{n} = (0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

b) $\overline{n} = (\frac{12}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{4}{13})$

4.8

a) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} = (1, -11, 2)$

b) $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (-54, 23, 4)$

4.9

a) $\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c}) = 6$

b) $\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c}) = 11$

4.10

a) sú komplanárne

b) nie sú komplanárne

4.11

a) sú komplanárne

b) nie sú komplanárne

4.12

a) $V = 4$

b) $V = \frac{26}{3}$

4.13 $D_1 = (0, 8, 0), \ D_2 = (0, -7, 0)$

4.14 $D_1 = (0, 0, 1), \ D_2 = (0, 0, 9)$

4.15 $d = \frac{3}{\sqrt{1457}}$

4.2 Lineárne útvary

Príklad 4.2.1 *Napíšme všeobecnú rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodmi* $A = (1, 2, -1),\ B = (2, 3, 5),\ C = (4, 1, 3)$.

Riešenie. Uvedieme niekoľko spôsobov riešenia danej úlohy.
I. Nájdeme dva rôznobežné vektory, ležiace v rovine α , napr. $\overline{u} = \overline{AB} = = (1, 1, 6)$, $\overline{v} = \overline{AC} = (3, -1, 4)$. Normálový vektor roviny α nájdeme ako vektorový súčin vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ postupom uvedeným v Príklade 4.1.3. Dostávame $\overline{n_\alpha} = \overline{u} \times \overline{v} = (5, 7, -2)$. Súradnice tohto vektora predstavujú koeficienty a, b, c vo všeobecnej rovnici roviny, teda $\alpha :\ 5x + 7y - 2z + d = 0$. Číslo d vypočítame tak, že dosadíme súradnice niektorého bodu do rovnice. Vezmime napr. bod A, dostávame:
$5 + 14 + 2 + d = 0$
$d = -21$.
Hľadaná všeobecná rovnica roviny je:
$\alpha :\ 5x + 7y - 2z - 21 = 0$.
II. Napíšeme najprv parametrické rovnice roviny α. Použijeme bod A a vektory $\overline{u}, \overline{v}$ z časti I. Hľadaná rovina má parametrické rovnice:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha : x & = & 1 & + & t & + & 3r \\ y & = & 2 & + & t & - & r \\ z & = & -1 & + & 6t & + & 4r; \quad t, r \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Všeobecnú rovnicu roviny dostaneme z parametrických rovníc postupným vylúčením premenných t,r . Najprv z prvej rovnice vyjadríme $t = x - 1 - 3r$ a dosadíme do druhej a tretej rovnice. Potom z jednej zo vzniknutých rovníc vyjadríme premennú r a dosadíme do poslednej rovnice.

$$\begin{array}{rcrl} y & = & 2 + x - 1 - 3r - r & \\ z & = & -1 + 6x - 6 - 18r + 4r & \\ \hline y & = & 1 + x - 4r & \Rightarrow r = \frac{1+x-y}{4} \\ z & = & -7 + 6x - 14r & \\ \hline z & = & 6x - 7 - 14 \cdot \frac{1+x-y}{4} & / \cdot 2 \\ 2z & = & 12x - 14 - 7 - 7x + 7y & \\ \alpha : 0 & = & 5x + 7y - 2z - 21. & \end{array}$$

III. Ak $X \in \alpha$, potom vektory $X - A$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ musia byť komplanárne, t.j. ich zmiešaný súčin sa rovná nule. Keďže $X - A = (x - 1, y - 2, z + 1)$, dostávame

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom

$$\begin{gathered}4(x-1)-(z+1)+18(y-2)-[3(z+1)-6(x-1)+4(y-2)]=0\\10x+14y-4z-42=0\\\alpha: 5x+7y-2z-21=0.\end{gathered}$$

♡

Príklad 4.2.2 *Napíšme parametrické rovnice priamky danej ako prienik dvoch rôznobežných rovín:*

$$p:\begin{cases}x-y+z+3=0\\2x+y-2z+6=0.\end{cases}$$

Riešenie. Súradnice ľubovoľného bodu danej priamky musia vyhovovať všeobecným rovniciam daných dvoch rovín, čo vedie k riešeniu sústavy dvoch rovníc s tromi neznámymi:

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&-3\\2&1&-2&-6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&-3\\0&-3&4&0\end{array}\right)$$

Položme $z=t;\ t\in\mathbb{R}$, potom $y=\frac{4}{3}t,\ x=-3+\frac{1}{3}t$. Smerový vektor priamky p je $\overline{u}=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)$ a po jeho prenásobení číslom 3 (nie je nutné) dostávame parametrické rovnice priamky:

$$\begin{aligned}p: x&=-3+t\\y&=4t\\z&=3t;\quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

♡

Príklad 4.2.3 *Určme vzájomnú polohu priamok p,q, ak*

$p: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$

$q: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+4}{3}.$

V prípade, že sa jedná o rôznobežky, určme ich priesečník. Ak sú to rovnobežky alebo mimobežky, určme ich vzdialenosť.

Riešenie. Smerové vektory priamok p,q sú $\overline{s_p}=(2,3,1),\overline{s_q}=(1,-1,3)$. Pretože tieto vektory nie sú kolineárne, priamky p,q nemôžu byť rovnobežné ani totožné. Aby sme zistili, či sú to rôznobežky alebo mimobežky, budeme hľadať ich prípadný spoločný bod (priesečník). Prepíšeme kanonické rovnice na parametrické. Dostaneme

$$p:\ \begin{aligned}x&=1+2t\\y&=-1+3t\\z&=t;\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}\ ,\qquad q:\ \begin{aligned}x&=2+s\\y&=1-s\\z&=-4+3s;\ s\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Riešime sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 1+2t &= 2+s \\ -1+3t &= 1-s \\ t &= -4+3s \quad . \end{aligned}$$

Táto sústava nemá riešenie a teda priamky nemajú spoločný bod, sú to mimobežky.
Vzdialenosť mimobežiek vypočítame nasledovným postupom:
1. Priamkou p preložíme rovinu α rovnobežnú s priamkou q.
2. Vzdialenosť mimobežiek sa rovná vzdialenosti priamky q a roviny α.
1. Normálový vektor roviny α je kolmý na smerový vektor priamky p aj na smerový vektor priamky q, teda $\overline{n_\alpha} = \overline{s_p} \times \overline{s_q} = (10, -5, -5)$. Za koeficienty a, b, c v rovnici roviny α vezmeme násobok tohto vektora číslom $\frac{1}{5}$. Dostávame $2x - y - z + d = 0$ a dosadením bodu $P = (1, -1, 0) \in p$ do tejto rovnice vypočítame $d = -3$.
Teda rovnica roviny α je:
$\alpha: \ 2x - y - z - 3 = 0.$

2. Vzdialenosť priamky q a roviny α sa rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu priamky q a roviny α. Vezmime $Q = (2, 1, -4) \in q$, potom
$d(p, q) = d(q, \alpha) = \frac{|2.2-1+4-3|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$ ♡

Príklad 4.2.4 *Určme vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ, ak*

$$p: \begin{array}{l} x = 1+3t \\ y = -1-2t \\ z = 2-4t; \ t \in \mathbb{R} \end{array} \quad , \quad \rho: \ 2x - y + 2z - 7 = 0.$$

Riešenie. Hľadáme priesečník priamky a roviny tak, že riešime sústavu štyroch rovníc so štyrmi neznámymi. Premenné *x,y,z* vyjadrené pomocou premennej t dosadíme do štvrtej rovnice:
$2(1+3t) - (-1-2t) + 2(2-4t) - 7 = 0$
$0 = 0.$
Rovnica má nekonečne veľa riešení, čo znamená, že priamka p leží v rovine ρ. ♡

Príklad 4.2.5 *Nájdime kolmý priemet bodu $A = (1, 2, -1)$ do roviny $\rho: \ 3x - 4y + z - 20 = 0$ a bod súmerne združený k bodu A podľa roviny ρ.*

Riešenie. Bodom A vedieme priamku p, ktorá je kolmá na rovinu ρ. Jej priesečník s rovinou ρ je hľadaný bod. Za smerový vektor priamky p zoberieme normálový vektor roviny ρ. Priamka p má parametrické rovnice:
$p: x = 1+3t, \ y = 2-4t, \ z = -1+t; \ t \in \mathbb{R}.$
Parameter t prislúchajúci priesečníku nájdeme tak, že dosadíme do rovnice roviny ρ za x, y, z ich vyjadrenia pomocou t. Dostávame $t = 1$, čo nám dáva priemet bodu A do rovnice roviny ρ bod $A' = (4, -2, 0)$. Označme

súmerne združený bod A''. Potom bod A' je stredom úsečky AA'', teda platí $A' = \frac{A+A''}{2}$, z čoho pre súradnice bodu A'' vyplýva
$A'' = (2x_{A'} - x_A, 2y_{A'} - y_A, 2z_{A'} - z_A) = (7, -6, 1)$. ♡

Príklad 4.2.6 *Nájdime kolmý priemet bodu* $A = (1, -1, 3)$ *na priamku*
$p : x = -1 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = -1 + t;\ t \in \mathbb{R}$.

Riešenie. Bodom A vedieme rovinu α kolmú na priamku p. Jej priesečník s priamkou p je hľadaný bod A'. Normálový vektor roviny α sa rovná smerovému vektoru priamky p, teda $\alpha :\ 2x-y+z+d = 0$ a po dosadení bodu A do rovnice roviny dostávame $d = -6$. Priesečník priamky p a roviny α nájdeme rovnako ako v Príklade 4.2.4. Dostávame $t = 2$, a teda $A' = (3, 1, 1)$. ♡

Príklad 4.2.7 *Nájdime kolmý priemet priamky* p *do roviny* ρ, *ak*
$p :\ x = 2 + 3t,\ y = 4 - 2t,\ z = -t;\ t \in \mathbb{R}$
$\varrho :\ 3x - 4y - z - 8 = 0$.

Riešenie. Priamkou p preložíme rovinu α kolmú na rovinu ρ. Hľadaná priamka p' je potom priesečnica rovín $\alpha,\ \rho$. Keďže rovina α obsahuje priamku p, jej normálový vektor je kolmý na smerový vektor priamky p. Zároveň je kolmý na normálový vektor roviny ρ. Teda

$$\overline{n_\alpha} = \overline{n_\rho} \times \overline{s_p} = (3, -4, -1) \times (3, -2, -1) = (-2, 0, -6) \| (1, 0, 3).$$

Dostávame $\alpha :\ x + 3z + d = 0$ a po dosadení bodu $(2, 4, 0) \in p$ vypočítame $d = -2$. Priamka p' je určená ako prienik rovín α a ρ

$$p' : \begin{cases} 3x - 4y - z - 8 = 0 \\ x + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Parametrické rovnice dostaneme postupom uvedeným v Príklade 4.2.2. Dostaneme

$$p' :\ \begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = -2 - \frac{5}{2}t \\ z = t;\ t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

♡

Príklad 4.2.8 *Nájdime priamku* t, *ktorá je rôznobežná s mimobežkami* p,q *a rovnobežná s priamkou* r, *ak*
$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1},\ q : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{3},\ \ r : \frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}$.

Riešenie. Hľadaná priamka je určená bodmi $A \in p,\ B \in q$. Súradnice bodov A resp. B musia súhlasiť s parametrickým vyjadrením priamky p, resp. q, t.j. $A = (1 + 2t, 1 + 3t, t)$ pre nejaké $t \in \mathbb{R}$, $B = (2 + s, 1 - s, -4 + 3s)$ pre nejaké $s \in \mathbb{R}$. Hodnoty t, s prislúchajúce bodom A, B určíme z podmienky $\overline{AB} \parallel \overline{s_r}$, t.j. $B - A = k\overline{s_p}$. Po dosadení súradníc bodov A,B dostávame

$(1+s-2t, -s-3t, -4+3s-t) = k(2,0,3)$ a porovnanie jednotlivých zložiek na oboch stranách rovnosti vedie k sústave troch rovníc s tromi neznámymi:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & - & 2t & - & 2k & = & -1 \\ & - & s & - & 3t & = & 0 \\ 3s & - & t & - & 3k & = & 4. \end{array}$$

Riešenie tejto sústavy je $s = \frac{33}{5}, t = -\frac{11}{5}, k = 6$, z čoho vypočítame súradnice bodov A, B. Dostávame $A = (-\frac{17}{5}, -\frac{28}{5}, -\frac{11}{5})$, $B = (\frac{43}{5},\ -\frac{28}{5},\ \frac{79}{5})$. Hľadaná priamka má potom parametrické rovnice:

$$\begin{array}{rcl} t: x & = & -\frac{17}{5} + 2r \\ y & = & -\frac{28}{5} \\ z & = & -\frac{11}{5} + 3r;\ r \in \mathbb{R}. \end{array} .$$

♡

Úlohy:

4.16 Napíšte parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodmi $P = (3,-5,6)$, $Q = (2,1,1)$ a je rovnobežná s osou o_x.

4.17 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodmi

a) $M = (1,-1,2),\ N = (2,1,2),\ P = (1,1,4)$

b) $A = (9,-11,5),\ B = (7,4,-2),\ C = (-7,13,-3)$

c) $K = (1,-2,4),\ L = (2,4,3),\ M = (0,1,3)$

d) $U = (1,0,-1),\ V = (2,4,2),\ W = (3,8,4)$.

4.18 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodom $M = (2,5,-4)$ a na súradnicových osiach vytína rovnako veľké úseky.

4.19 Vypočítajte veľkosť uhla φ , ktorý zvierajú roviny α, β, ak

a) $\alpha:\ \sqrt{2}x + y - z - 10 = 0,\ \beta:\ \sqrt{2}x - y - z = 0$

b) $\alpha:\ 2x + 4y - z + 2 = 0,\ \beta:\ 4x + 8y - 2z - 2 = 0$

c) $\alpha:\ 2x + 4y - z + 2 = 0,$
$\beta:\ x = 1 + s + t,\ y = -4 - t,\ z = -3 + s - t;\ t, s \in \mathbb{R}.$

4.20 Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (3,-1,6)$ od roviny α, ak

a) $\alpha:\ 3x + 4y + 2z - 10 = 0$

b) rovina α prechádza bodmi $M = (1, -4, 8)$, $N = (3, -5, 2)$, $P = (7, 0, 4)$.

4.21 Zistite vzájomnú polohu priamok p, q, ak

a) $p:\ x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 2 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$
$q:\ x = s,\ y = 1 + s,\ z = -1 - 2s;\ s \in \mathbb{R}$

b) $p:\ x = -1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 2 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$
$q:\ \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$

c) $p: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ $q:\ \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$

d) $p:\ x = 4,\ y = 5 + t,\ z = 1 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$
$q: \begin{cases} x - y - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$

e) $p: \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$ $q: \begin{cases} x + z - 8 = 0 \\ 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

f) $p: \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$
$q:\ x = -1,\ y = 2 + 2t,\ z = 6 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$

4.22 Napíšte všeobecné rovnice priamky r, ktorá prechádza bodom $A = (1, 15, 8)$, je kolmá na priamku p a je rôznobežná s priamkou q, ak
$p:\ x = 4 + 4t,\ y = 2 + 4t,\ z = 3 - 9t;\ t \in \mathbb{R}$
$q:\ \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}.$

4.23 Nájdite priamku t, ktorá je rôznobežná s danými mimobežkami p,q a rovnobežná s priamkou r, ak p: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-2}$
q: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$
$r: \begin{cases} x - y + z + 11 = 0 \\ x - 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

4.24 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodom M a v ktorej leží priamka p, ak

a) $M = (2, -1, -3)$, $p: \begin{cases} x + 2y - 3z - 3 = 0 \\ 2x + y + z - 7 = 0 \end{cases}$

b) $M = (0, 3, 2)$, $p: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - 2y - z + 5 = 0 \end{cases}$

c) $M = (1, -1, 4)$, $p: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$.

4.25 Zistite vzájomnú polohu priamky p a roviny α, ak

a) $p: \; x = 3 + 2t, \; y = -2 - 2t, \; z = 1 - 3t; \; t \in \mathbb{R}$
$\alpha: \; 2x - y - 2z - 6 = 0$

b) $p: \frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+2}{4}$
$\alpha: 2x + 5y + z + 7 = 0$

c) $p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{1}$
$\alpha: 2x + y - 10z + 2 = 0$

d) $p: \; x = 2 + 2t, \; y = 1 - t, \; z = 1 + t; \; t \in \mathbb{R}$
$\alpha: \; x = 1 + r + s, \; y = 1 - s, \; z = r; \; r, s \in \mathbb{R}$

e) $p: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: 3x - y + 2z = 0$

f) $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$
$\alpha: \; x = 1 + t - s, \; y = -t + 2s, \; z = 2 + 3t; \; t, s \in \mathbb{R}$.

4.26 Napíšte kanonické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $A = (2, -2, 0)$ a priesečníkom priamky $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{2}$ s rovinou $\alpha: \; 4x - 3y + 2z - 1 = 0$.

4.27 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodom $A = (4, -3, 1)$ a je rovnobežná s priamkami p, q, ak

$p: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ $\qquad$ $q: \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

4.28 Napíšte kanonický tvar rovnice priamky r, ktorá leží v rovine $\alpha: \; 2x + y = 0$ a pretína priamky p, q, ak

$p: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$ $\qquad$ $q: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

4.29 Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza priesečníkom roviny α a priamky p, leží v rovine α a je kolmá na priamku p, ak

a) $\alpha: \; x + y + z - 1 = 0$
$p: \; x = t, \; y = 1, \; z = -1; \; t \in \mathbb{R}$

b) $\alpha: \; 2x - 2y - z - 4 = 0$
$p: \frac{x-5}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{4}$.

4.30 Napíšte parametrické rovnice priamky p', ktorá je kolmým priemetom priamky p do roviny α, ak

a) $p: \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ 3x + y + 2z + 3 = 0$

b) $p: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$
$\alpha: \ x - 3y - z + 8 = 0$

c) $p: \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ 9x + 4y - 5z - 13 = 0$

d) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}$
$\alpha: \ x + y - z + 5 = 0.$

4.31 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, v ktorej leží priamka $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ a ktorá je kolmá na rovinu $\varrho: \ 3x - y + 2z - 2 = 0.$

4.32 Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $P = (1, 1, 1)$ a kolmo pretína priamku $p: \frac{x-3}{3} = \frac{y-18}{8} = \frac{z-10}{4}$.

4.33 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, v ktorej leží bod $P = (4, -3, -2)$ a ktorá je kolmá na roviny $\rho: \ x + 2y - z = 0, \ \sigma: \ 2x - 3y + 4z - 5 = 0.$

4.34 Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $P = (-4, 3, 0)$ a je rovnobežná s priamkou
$p: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

4.35 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, v ktorej leží priamka
$p: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$
a ktorá je kolmá na rovinu $\varrho: \ x + y + z - 1 = 0.$

4.36 Nájdite bod P', ktorý je kolmým priemetom bodu P na priamku p, ak

a) $P = (2, 0, 1), \ p: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$

b) $P = (-7, 8, 12), \ p: \begin{cases} x + 2y + z - 33 = 0 \\ 2x + y - z + 12 = 0 \end{cases}$

c) $P = (1, 0, 2), \ p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-13}{-1}.$

4.37 Nájdite bod P', ktorý je kolmým priemetom bodu P do roviny ϱ, ak

a) $P = (-6, 3, 3), \ \varrho: \ 4x + 5y - z - 9 = 0$

b) $P = (1, 3, 4), \ \varrho: \ x - y + 2z = 0$

c) $P = (-3, 5, 7)$, $\varrho:\ 3x + y + 4z - 50 = 0$.

4.38 Nájdite bod Q, súmerne združený k bodu P podľa priamky p, ak

a) $P = (8, 6, -4)$, $p:\ x = 1 + 3t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - 4t;\ t \in \mathbb{R}$

b) $P = (3, 7, -2)$, $p: \begin{cases} x - 2y - 2z - 2 = 0 \\ x + 2y - 6z + 10 = 0. \end{cases}$

4.39 Nájdite bod Q, súmerne združený k bodu P podľa roviny α, ak

a) $P = (5, 2, -6)$, $\alpha:\ x - y - 4z - 9 = 0$

b) $P = (-1, 3, -3)$, $\alpha:\ x = -10 + t + 4s,\ y = 1 + t + s,\ z = 2 + t + 2s;$ $t, s \in \mathbb{R}$.

4.40 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežiek p, q, ak

a) $p:\ x = -1 + 2t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + t;\ t \in \mathbb{R}$
$q:\ x = 3 + 4s,\ y = 1 - 2s,\ z = 2 + 2s;\ s \in \mathbb{R}$

b) $p: \begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 2x + y - z - 8 = 0 \end{cases}$
$q:\ x = 2,\ y = 3 + t,\ z = 1 + t;\ t \in \mathbb{R}$.

4.41 Vypočítajte vzdialenosť priamky p od roviny ϱ, ak

a) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$
$\varrho:\ x = 1 + 2r + s,\ y = r - s,\ z = 1 - r;\ r, s \in \mathbb{R}$

b) $p: \begin{cases} 4x - 2y + z + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$
$\varrho: 12x - 4y - 3z - 3 = 0$.

4.42 Vypočítajte vzdialenosť mimobežiek p, q, ak

a) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3};\quad q: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$

b) $p:\ x = 2 - 14t,\ y = 3 + 3t,\ z = -1 + 4t;\ t \in \mathbb{R}$
$q:\ x = -1 - 10s,\ y = 1 + 2s,\ z = 4 + 3s;\ s \in \mathbb{R}$

c) $p:\ x = 4,\ y = 5 + t,\ z = 1 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$
$q: \begin{cases} x - y - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$

Výsledky:

4.16 parametrické rovnice: $x = 3 - t + s,\ y = -5 + 6t,\ z = 6 - 5t;\ \ t, s \in \mathbb{R}$
všeobecná rovnica: $5y + 6z - 11 = 0$

4.17

a) $\alpha: \ 2x - y + z - 5 = 0$

b) $\alpha: \ x + 2y + 4z - 7 = 0$

c) $\alpha: \ 3x - 2y - 9z + 29 = 0$

d) $\alpha: \ 4x - y - 4 = 0$

4.18 $\alpha: \ x + y + z - 3 = 0$

4.19

a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

b) $\varphi = 0$

c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

4.20

a) $d = \frac{7}{\sqrt{29}}$

b) $d = \frac{4}{3}$

4.21

a) mimobežky

b) rôznobežky

c) rovnobežky

d) mimobežky

e) mimobežky

f) totožné priamky

4.22 $r: \begin{cases} x = 1 \\ 4y - 9z + 12 = 0 \end{cases}$

4.23 $t: \ x = 1 + 2t, \ y = -2 + t, \ z = 3 - t; \ t \in \mathbb{R}$

4.24

a) $\alpha: \ 19x + 20y - 15z - 63 = 0$

b) $\alpha: \ 5x - y - 5z + 13 = 0$

c) $\alpha: \ x + 8y - 5z + 27 = 0$

4.25

a) priamka leží v rovine

b) priamka je rovnobežná s rovinou

c) priamka pretína rovinu v bode $P = (5, 8, 2)$

d) priamka leží v rovine

e) priamka pretína rovinu v bode $P = (-4, 14, 13)$

f) priamka je rovnobežná s rovinou

4.26 $q: \frac{x-2}{-70} = \frac{y+2}{425} = \frac{z}{174}$

4.27 $\alpha: \; 16x - 27y + 14z - 159 = 0$

4.28 $r: \frac{x}{4} = \frac{y}{-8} = \frac{z-1}{12}$

4.29

a) $q: \; x = 1, \; y = 1 - t, \; z = -1 + t; \; t \in \mathbb{R}$

b) $q: \; x = 11 + 7t, \; y = \frac{9}{2} + 12t, \; z = 9 - 10t; \; t \in \mathbb{R}$

4.30

a) $p^{'}: \; x = 1 + 5t, \; y = -17t, \; z = t; \; t \in \mathbb{R}$

b) $p^{'}: \; x = 15 + 4t, \; y = -t, \; z = -1 + t; \; t \in \mathbb{R}$

c) $p^{'}: \; x = 1 - 137t, \; y = 1 + 217t, \; z = -73t; \; t \in \mathbb{R}$

d) $p^{'}: \; x = 13 + 7t, \; y = t, \; z = 18 + 8t; \; t \in \mathbb{R}$

4.31 $\alpha: \; x + y - z + 1 = 0$

4.32 $q: \; x = 1 + 4t, \; y = 1 - t, \; z = 1 - t; \; t \in \mathbb{R}$

4.33 $\alpha: \; 5x - 6y - 7z - 52 = 0$

4.34 $q: \; x = -4 + t, \; y = 3 + 3t, \; z = 5t; \; t \in \mathbb{R}$

4.35 $\alpha: \; 2x - y - z + 5 = 0$

4.36

a) $P' = \left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}\right)$ b) $P' = (-5, 12, 14)$ c) $P' = (3, 2, 12)$

4.37

a) $P' = (-4, \frac{11}{2}, \frac{5}{2})$ b) $P' = (0, 4, 2)$ c) $P' = (0, 6, 11)$

4.38

a) $Q = (6, -4, -8)$ b) $Q = (5, -9, 6)$

4.39

a) $Q = (3, 4, 2)$ b) $Q = (-5, -5, 9)$

4.40

a) $d(p, q) = \sqrt{\frac{53}{6}}$ b) $d(p, q) = 3$

4.41

a) $d(p, \varrho) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $d(p, \varrho) = \frac{10}{13}$

4.42

a) $d(p, q) = \frac{6}{\sqrt{59}}$ b) $d(p, q) = 1$ c) $d(p, q) = \frac{24}{\sqrt{21}}$

4.3 Kužeľosečky

Príklad 4.3.1 *Napíšme kanonický tvar danej kužeľosečky, určme jej druh a charakteristiky, ak je daná rovnicou*

a) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 24y - 9 = 0$

b) $4y^2 + 12x - 4y - 29 = 0.$

Riešenie.
a) Keďže koeficienty pri členoch x^2, y^2 sú nenulové a rôzneho znamienka, daná kužeľosečka môže byť hyperbola alebo dvojica priamok. Vyberieme pred zátvorky koeficienty pri x^2, y^2 a doplníme na úplný štvorec obidve premenné . Dostávame:
$9(x^2 - \frac{2}{3}x) - 16(y^2 - \frac{3}{2}x) - 9 = 0$
$9[(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}] - 16[(y - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16}] - 9 = 0$
$9(x - \frac{1}{3})^2 - 16(y - \frac{3}{4})^2 = 1$
$\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(y-\frac{3}{4})^2}{\frac{1}{16}} = 1$
Daná kužeľosečka je teda hyperbola pretínajúca svoju vodorovnú os súmernosti so stredom v bode $S = (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ a veľkosťou poloosí $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$.

b) Daná kužeľosečka je zrejme parabola. Doplníme na úplný štvorec premennú y a upravíme rovnicu na kanonický tvar. Dostávame:

$4(y^2 - y) = 29 - 12x$
$4[(y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] = 29 - 12x$
$4(y - \frac{1}{2})^2 = 30 - 12x$
$(y - \frac{1}{2})^2 = -3x + \frac{15}{2}$
$(y - \frac{1}{2})^2 = -3(x - \frac{5}{2})$
Parabola má vodorovnú os súmernosti a je otočená doľava. Vrchol je v bode $V = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. ♡

Príklad 4.3.2 *Otočením súradnicového systému upravme rovnicu kužeľosečky* $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ *na kanonický tvar, určme jej typ a charakteristiky.*

Riešenie. Vychádzame zo všeobecnej rovnice kužeľosečky

$$Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Vypočítame
$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}} = \frac{14-21}{\sqrt{24^2+(-7)^2}} = -\frac{7}{25}$,
potom $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$.
Dostávame transformačné rovnice:
$x = \sin\alpha.x' - \cos\alpha.y' = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{1}{5}(3x' - 4y')$
$y = \cos\alpha.x' + \sin\alpha.y' = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{1}{5}(4x' + 3y')$.
Po dosadení do rovnice kužeľosečky dostávame rovnicu
$30x'^2 + 5y'^2 + 12x' + 14y' - 139 = 0$.
Ďalej upravujeme na kanonický tvar:
$30(x'^2 + \frac{2}{5}x') + 5(y'^2 + \frac{14}{5}y') - 139 = 0$
$30(x' + \frac{1}{5})^2 - \frac{30}{25} + 5(y' + \frac{7}{5})^2 - \frac{49.5}{25} - 139 = 0$
$30(x' + \frac{1}{5})^2 + 5(y' + \frac{7}{5})^2 = 150$
$\frac{(x'+\frac{1}{5})^2}{5} + \frac{(y'+\frac{7}{5})^2}{30} = 1.$
Daná kužeľosečka je teda elipsa s polosami veľkostí $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{30}$ a stredom $S' = (-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$. ♡

Príklad 4.3.3 *Určme druh a charakteristiky kužeľosečky danej rovnicou* $x^2 - xy - 2y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.

Riešenie. Pri použití postupu uvedeného v Príklade 4.3.2 dostaneme
$\cos 2\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{2}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{2}}$.
Je zrejmé, že po dosadení transformačných rovníc do rovnice kužeľosečky dostaneme "škaredé" koeficienty. Skúsme zistiť druh kožeľosečky pomocou invariantov. Dostávame

$I_1 = A - D = 1 - 2 = -1$

$I_2 = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}$

$I_3 = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$

Zistili sme, že sa jedná o dvojicu priamok. V tomto prípade hľadané rovnice priamok môžeme nájsť bez pootočenia súradnicového systému a to tak, že sa budeme na rovnicu kužeľosečky pozerať ako na kvadratickú rovnicu vzhľadom k premennej x alebo y. Zapíšme rovnicu kužeľosečky ako kvadratickú rovnicu vzhľadom k premennej y a vyriešme ju. Dostávame:

$-2y^2 + y(-x+8) + x^2 + 2x - 8 = 0$

$D = (-x+8)^2 - 4.(-2).(x^2 + 2x - 8) = 9x^2$

$y_{1,2} = \frac{x-8 \pm 3x}{-4}$,

teda máme dve riešenia:

$y = \frac{4x-8}{-4} = -x + 2$, čo predstavuje priamku $x + y - 2 = 0$ a

$y = \frac{-2x-8}{-4} = \frac{1}{2}x + 2$, čo predstavuje priamku $x - 2y + 4 = 0$.

Riešenie môžeme zapísať aj v tvare $(x + y - 2).(x - 2y + 4) = 0$. ♡

Úlohy:

4.43 Určte druh kužeľosečky, jej kanonický tvar a charakteristiky, ak je daná rovnicou

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

b) $x^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 14 = 0$

c) $4y^2 - 12x - 12y + 3 = 0$

d) $x^2 - 4 = 0$

e) $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

f) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 14 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

h) $9x^2 - 36y^2 + 6x + 48y - 51 = 0$

i) $3x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}y + 12 = 0$

j) $-5x^2 + 3y^2 - 10x - 24y + 28 = 0$

k) $25x^2 + 25y^2 + 20x + 30y + 4 = 0$

l) $12x^2 + 8y^2 + 12x - 24y + 21 = 0$

4.44 Otočením súradnicového systému upravte rovnicu kužeľosečky a znázornite ju:

a) $4x^2 + y^2 + 4xy - 12x - 6y + 5 = 0$

b) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 14\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 18 = 0$

c) $26x^2 - 20xy + 26y^2 - 124\sqrt{2}x + 92\sqrt{2}y + 365 = 0$

d) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 26\sqrt{2}x + 22\sqrt{2}y + 78 = 0$

e) $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4(\sqrt{3}+1)x - 4(\sqrt{3}-1)y + 2 = 0$

f) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + (\sqrt{3}-8)x - (8\sqrt{3}+1)y + 10 = 0$

g) $x^2 + 10xy + 11y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 36 = 0$

h) $4x^2 - 8xy + 4y^2 - 7\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y + 6 = 0$

i) $x^2 - 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 6 = 0$

j) $36x^2 - 24xy + 29y^2 - 72x - 96y = 0$

k) $13x^2 - 48xy + 27y^2 + 116x - 138y + 220 = 0$

l) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 120x - 90y + 125 = 0$

m) $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 29\sqrt{2}x + 25\sqrt{2}y + 49 = 0$

n) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$

o) $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 25 = 0$

p) $2x^2 + 2y^2 + 10xy + 9x + 12y - 2 = 0$

q) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 4 = 0$

r) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$

s) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 6x + 12y + 9 = 0$

t) $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$

u) $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 20 = 0$

v) $5x^2 + 2y^2 + 4xy - 18x - 12y + 15 = 0$

w) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$

x) $21x^2 - 10y^2 + xy = 0$

y) $x^2 + y^2 + 6xy + 6x + 2y - 1 = 0$

z) $x^2 + y^2 - 2xy + 6x + 6y - 9 = 0$

Výsledky:

4.43

a) $(x-3)^2+(y+2)^2=4$	kružnica	$S=(3,-2),\ r=2$
b)$(x+3\sqrt{2})^2=-2\sqrt{2}(y-\sqrt{2})$	parabola	$V=(-3\sqrt{2},\sqrt{2}),\ p=\sqrt{2}$
c) $(y-\frac{3}{2})^2=3(x+\frac{1}{2})$	parabola	$V=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}),\ p=\frac{3}{2}$
d)$x=\pm 2$	dvojica priamok	rovnobežky
e) $(x-y+3)(x+y+3)=0$	dvojica priamok	rôznobežky
f) $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=-1$	prázdna množina	
g)$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$	elipsa	$S=(1,-2),\ a=2,\ b=3$
h) $\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{4}-(y-\frac{2}{3})^2=1$	hyperbola	$S=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}),\ a=2,\ b=1$
i) $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{3}+\frac{(y+2\sqrt{3})^2}{9}=1$	elipsa	$S=(\sqrt{3},-2\sqrt{3}),$
$a=\sqrt{3},\ b=3$		
j) $\frac{(y-4)^2}{5}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$	hyperbola	$S=(-1,4),\ a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{3}$
k) $(x+\frac{2}{5})^2+(y+\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$	kružnica	$S=(-\frac{2}{5},-\frac{3}{5}),\ r=\frac{3}{5}$
l) $3(x+\frac{1}{2})^2+2(y-\frac{3}{2})^2=0$	bod	$M=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

4.44

a) $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$	dvojica priamok	$(2x+y-5)(2x+y-1)=0$
b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$	elipsa	$(x'-1)^2+\frac{(y'+3)^2}{4}=1$
c) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$	bod	$(1,-3)$
d) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$	hyperbola	$\frac{(x'+1)^2}{4}-(y'+3)^2=1$
e) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$	hyperbola	$-(x'+2)^2+(y'+2)^2=1$
f) $\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$	parabola	$y'+3=2(x'-2)^2$
g) $\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$	dvojica priamok	$y'+3=\pm 2x'$
h) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$	parabola	$x'-1=-4(y'+1)^2$
i) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$	dvojica priamok	$y'+1=\pm 2$
j) $\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$	elipsa	$\frac{(x'-3)^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$
k) $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$	hyperbola	$\frac{(x'-1)^2}{9}-(y'-2)^2=1$

l) $\sin\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$	dvojica priamok	$x' - 3 = \pm 2$
m) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	elipsa	$\frac{(x'-2)^2}{36} + \frac{(y'+3)^2}{4} = 1$
n) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	elipsa	$\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1$
o) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	parabola	$(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 4\sqrt{2}(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2})$
p) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	hyperbola	$\frac{(x'+\frac{3\sqrt{2}}{4})^2}{\frac{19}{14}} - \frac{(y'-\frac{\sqrt{2}}{4})^2}{\frac{19}{16}} = 1$
q) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	prázdna množina	$(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{3}{2} = 0$
r) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	parabola	$x'^2 = \sqrt{2}(y' + \frac{5\sqrt{2}}{4})$
s) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$	priamka	$(y' + \frac{3}{\sqrt{6}})^2 = 0$
t) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	elipsa	$(x' - \sqrt{2})^2 + \frac{y'^2}{9} = 1$
u) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$	elipsa	$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$
v) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$	elipsa	$(x' - \frac{4\sqrt{5}}{5})^2 + \frac{(y'-\frac{3\sqrt{5}}{5})^2}{6} = 1$
w) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	dvojica priamok	$x'(x' + \sqrt{2})$, resp. $(x+y)(x+y+2) = 0$
x) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\frac{31}{\sqrt{962}}}{2}},\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{31}{\sqrt{962}}}{2}}$	dvojica priamok	$(3x - 2y)(7x + 5y) = 0$
y) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	hyperbola	$\frac{(x'+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\frac{1}{2}} - (y' + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$
z) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	parabola	$y'^2 = -3\sqrt{2}(x' - \frac{3\sqrt{2}}{4})$

4.4 Kvadratické plochy

Príklad 4.4.1 *Dané rovnice kvadratických plôch preveďme na kanonický tvar a určme typ kvadratickej plochy:*

a) $9x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 54x + 8y + 49 = 0$

b) $4x^2 - 3y^2 + 8x - 30y - 24z - 47 = 0.$

Riešenie. Úpravu na kanonický tvar urobíme obdobne ako v predchádzajúcej časti vyberaním pred zátvorku a doplňovaním na úplný štvorec:
a) $9(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 2y) - 9z^2 + 49 = 0$
$9[(x-3)^2 - 9] + 4[(y+1)^2 - 1] - 9z^2 + 49 = 0$

$9(x-3)^2 + 4(y+1)^2 - 9z^2 = 36$
$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$
Daná plocha je jednodielny eliptický hyperboloid.

b) $4(x^2+2x) - 3(y^2+10y) - 24z - 47 = 0$
$4[(x+1)^2 - 1] - 3[(y+5)^2 - 25] - 24z - 47 = 0$
$4(x+1)^2 - 3(y+5)^2 = 24z - 24$
$\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y+5)^2}{4} = 2(z-1).$
Daná plocha je hyperbolický paraboloid. ♡

Úlohy:

4.45 Dané rovnice kvadratických plôch preveďte na kanonický tvar a určte typ kvadratickej plochy:

a) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x - 8y - 4z + 10 = 0$

b) $8x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 16x - 48y - 16z + 120 = 0$

c) $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 12x - 2y + 19 = 0$

d) $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 72x + 36z + 9 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4z + 13 = 0$

f) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 18 = 0$

g) $81x^2 - 36y^2 + 108x + 24y + 324z - 292 = 0$

h) $3x^2 + 3y^2 - 5z^2 - 18x + 12y + 39 = 0$

i) $x^2 - 2y^2 + 8x - 4y + 32 = 0$

j) $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 18x + 4y + 17 = 0$

k) $3x^2 + 4y^2 - z^2 - 16y - 2z + 27 = 0$

l) $x^2 - 6x + 6y + 27 = 0$

m) $16x^2 - 21y^2 - 160x - 168y + 64 = 0$

n) $x^2 + 2y^2 - 7z^2 + 2x - 84z - 265 = 0$

o) $12x^2 + 16y^2 - 8z^2 + 36x - 16y - 16z + 71 = 0$

p) $25x^2 + 50y^2 - 10x + 40y - 300z + 909 = 0$

q) $x^2 + 6x - 7 = 0$

Výsledky:

4.45

a) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$	posunutá guľová plocha
b) $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{6} = 0$	bod $(-1, 4, 2)$
c) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 0$	posunutá eliptická kužeľová plocha
d) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$	posunutý elipsoid
e) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2} = -2(z+2)$	posunutý rotačný paraboloid
f) $\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{7} + \frac{(y+\frac{3}{2})^2}{7} = 1$	posunutá rotačná valcová plocha
g) $\frac{(x+\frac{2}{3})^2}{2} - \frac{(y-\frac{1}{3})^2}{\frac{9}{2}} = -2(z-1)$	posunutý hyperbolický paraboloid
h) $\frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{5} - \frac{z^2}{3} = 0$	posunutá rotačná kužeľová plocha
i) $-\frac{(x+4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$	posunutá hyperbolická valcová plocha
j) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{z^2}{3} = 1$	posunutý jednodielny eliptický hyperboloid
k) $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} - \frac{(z+1)^2}{12} = -1$	posunutý dvojdielny hyperboloid
l) $(x-3)^2 = -6(y+3)$	posunutá parabolická valcová plocha
m) $\frac{(x-5)^2}{21} - \frac{(y+4)^2}{16} = 0$	dvojica rôznobežných rovín
n) $\frac{(x+1)^2}{14} + \frac{y^2}{7} - \frac{(z+6)^2}{2} = 1$	posunutý jednodielny hyperboloid
o) $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{3} - \frac{(z+1)^2}{6} = -1$	posunutý dvojdielny hyperboloid
p) $\frac{(x-\frac{1}{5})^2}{6} + \frac{(y+\frac{2}{5})^2}{3} = 2(z-3)$	posunutý eliptický paraboloid
q) $(x+3)^2 - 16 = 0$	dve rovnobežné roviny : $x = -7,\ x = 1$

5 Lineárne priestory

5.1 Lineárna nezávislosť

Príklad 5.1.1 *Rozhodnime, či množina prvkov S v priestore $(L,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$ je lineárne závislá alebo nezávislá, ak*

a) $S = \{(1,5,3,-6),(2,4,1,0),(1,1,2,4),(2,8,2,-10)\},\ \ L = \mathbb{R}^4$

b) $S = \{1+t+t^2,\ 2-t+3t^2,\ -1+2t-t^2\},\ L = P_{\leq 2}(\mathbb{R})$.

Riešenie.
a) Vytvoríme maticu A, ktorej riadky budú dané vektory. Ak hodnosť matice A je rovná 4, dané vektory sú lineárne nezávislé, ináč sú lineárne závislé.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 2 & 8 & 2 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ (-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ +6R_2 \\ +4R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -R_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Keďže $h(A) = 3$, daná množina vektorov je lineárne závislá.
b) Potrebujeme zistiť, pre aké trojice $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sa lineárna kombinácia rovná nule (nulovému polynómu), t.j.

$$\alpha_1(1+t+t^2) + \alpha_2(2-t+3t^2) + \alpha_3(-1+2t+3t^2) = 0.$$

Roznásobením a úpravou ľavej strany dostávame

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)t^2 = 0.$$

Porovnanie koeficientov pri rovnakých mocninách t^0, t^1, t^2 vedie k sústave

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 3\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

Jedná sa o homogénnu sústavu, ktorá má len triviálne riešenie práve vtedy, ak sa hodnosť matice sústavy rovná počtu neznámych. Postupom uvedeným v kapitole I.Aritmetické vektory a matice, ako aj v Príklade 5.1.1a) zistíme, že hodnosť matice sústavy sa rovná trom, čo znamená, že množina S je lineárne nezávislá. ♡

Príklad 5.1.2 *Zistime, pre aké hodnoty α je množina vektorov M v priestore $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ lineárne závislá , ak*

a) $M = \{(1,1,2,4),\ (0,1,3,5),\ (2,3,2,\alpha,2),\ (1,3,4,2)\},\ L = \mathbb{R}^4$

b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} \right\},\ L = R^{2\times 2}.$

Riešenie.
a) Zistíme hodnosť matice A vytvorenej z daných vektorov v závislosti od parametra α:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & \alpha \\ 2 & 3 & \alpha & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & \alpha-4 \\ 0 & 1 & \alpha-4 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2R_2 \\ -R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & \alpha-14 \\ 0 & 0 & \alpha-7 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (\alpha-7)R_3+4R_4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & \alpha-14 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-21\alpha+54 \end{bmatrix}.$$

Z toho $h(A) = 3$, ak $\alpha^2 - 21\alpha + 54 = 0$, t.j. $\alpha = 3 \vee \alpha = 18$. Keďže násobenie riadku matice číslom 0 nie je ekvivalentná úprava, musíme zistiť hodnosť matice pre $\alpha = 7$. Pre $\alpha = 7$ je $h(A) = 4$. Daná množina vektorov je lineárne závislá pre $\alpha = 3,\ \alpha = 18$.
b)Prirodzených aritmetických reprezentantov jednotlivých vektorov napíšeme ako riadky matice. Dostávame maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Zistiť, kedy je hodnosť štvorcovej matice menšia ako jej rozmer, môžeme aj pomocou jej determinantu. Vypočítajme

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -R_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & \alpha-8 \\ 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & \alpha-8 \\ -3 & 0 & -8 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$= -9(\alpha-8) + 48 - [120 + 9\alpha] = -18\alpha.$
Aby bola množina M lineárne závislá, musí platiť $|A| = 0$, t.j. $-18\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. ♡

Úlohy:

5.1 Rozhodnite o lineárnej závislosti, resp. nezávislosti množiny S prvkov priestoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, ak

a) $S = \{(1,2,-5),\ (3,-4,8),\ (-7,16,-34)\},\ L = \mathbb{R}^3$

b) $S = \{(1,3,7),\ (-2,4,3),\ (3,-1,3)\},\ L = \mathbb{R}^3$

c) $S = \{(1,0,2,-1),\ (3,4,-2,0),\ (1,-2,3,4),\ (5,2,3,3),\ (3,6,-3,-5)\}$, $L = \mathbb{R}^4$

d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \right\},\ L = \mathbb{R}^{2\times 2}$

e) $S = \{1+t^2,\ 2+3t+5t^2,\ 3+3t+4t^2\},\ L = P_{\leq 2}(\mathbb{R})$

f) $S = \{1+t^3,\ t+t^2,\ t^2+t^3,\ 1+t+2t^2+2t^3\},\ L = P_{\leq 3}(\mathbb{R})$.

5.2 Zistite, pre aké hodnoty parametrov α, β je daná množina M prvkov priestoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ lineárne závislá, ak

a) $M = \{(3,6,7),\ (6,12,14),\ (2,\alpha,\ \beta)\},\ L = \mathbb{R}^3$

b) $M = \{(3,-2,4),\ (1,5,6),\ (4,3,\alpha)\},\ L = \mathbb{R}^3$

c) $M = \{(2,-4,5,3),\ (2,4,-1,0),\ (0,-8,6,\alpha),\ (-2,-12,\beta,3)\},\ L = \mathbb{R}^4$

d) $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix} \right\},\ L = \mathbb{R}^{2\times 2}$

e) $M = \{2t^3-t^2+3t,\ 5t^3+4t^2-t+2,\ 3t^3+\alpha t^2-4t+2,\ 4t^3-2t^2+\beta t\}$, $L = P_{\leq 3}(\mathbb{R})$

f) $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $L = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Výsledky:

5.1

a) lineárne závislá

b) lineárne nezávislá

c) lineárne závislá

d) lineárne závislá

e) lineárne nezávislá

f) lineárne závislá

5.2

a) pre každé $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

b) $\alpha = 10$

c) $\alpha = 3,\ \beta \in \mathbb{R}$ alebo $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta = 7$

d) $\alpha = -1$

e) $\alpha = 5,\ \beta \in \mathbb{R}$ alebo $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta = 6$

f) pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

5.2 Báza lineárneho priestoru

Príklad 5.2.1 *Zistime, či dané vektory tvoria bázu lineárneho priestoru* $(L, +, \cdot)$ *nad* $\mathbb{R}$*, ak*

a) $L = \mathbb{R}^3, \overline{a} = (1,5,2), \overline{b} = (3,1,-2),\ \overline{c} = (0,-1,-1)$

b) $L = P_{\leq 3}(\mathbb{R}),\ \overline{a} = 1 - t + t^2,\ \overline{b} = 2 + 4t - t^2 + t^3,\ \overline{c} = 1 + t^3,\ \overline{d} = 2 + 3t$

c) $L = \mathbb{R}^4,\ \overline{a} = (1,2,0,1),\ \overline{b} = (4,2,8,1),\ \overline{c} = (2,1,0,3)$

d) $L = \mathbb{R}^3,\ \overline{a} = (1,7,2),\ \overline{b} = (4,6,2),\ \overline{c} = (3,1,4),\ \overline{d} = (4,1,2)$.

Riešenie.

a) Vzhľadom na to, že priestor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je trojrozmerný, vektory $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ tvoria bázu, ak sú lineárne nezávislé. Zistíme to postupom uvedeným v Príklade 5.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -14 & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -14R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vektory $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu priestoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

b) Vytvoríme lineárnu kombináciu vektorov $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ a položíme ju rovnú nulovému polynómu:
$k(1 - t + t^2) + l(2 + 4t - t^2 + t^3) + m(1 + t^3) + n(2 + 3t) = 0$
$k + 2l + m + 2n + t(-k + 4l + 3n) + t^2(k - l) + t^3(l + m) = 0.$
Riešime sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} k + 2l + m + 2n &= 0 \\ -k + 4l + 3n &= 0 \\ k - l &= 0 \\ l + m &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tejto sústavy je $(k,l,m,n)^\top = (t,t,-t,-t)^\top;\ t \in \mathbb{R}$. Pretože táto sústava má nekonečne veľa riešení, dané vektory sú lineárne závislé a teda netvoria bázu priestoru $(P_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$.

c) Keďže priestor $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$ je štvorrozmerný, každá jeho báza musí obsahovať 4 vektory. Vektory $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ teda nemôžu tvoriť bázu priestoru $\mathbb{R}^4$ bez ohľadu na to, či sú lineárne závislé alebo nezávislé.

d) Priestor $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$ je trojrozmerný a preto vektory $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ sú určite lineárne závislé a teda netvoria jeho bázu. ♡

Príklad 5.2.2 *Zistime, či vektory* $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ *tvoria bázu priestoru, ktorý generujú.*

Riešenie. Priestor generovaný danými vektormi je lineárny obal množiny týchto vektorov. Dané vektory tvoria jeho bázu, ak sú lineárne nezávislé.Prirodzených aritmetických reprezentantov daných vektorov (ktorými sú matice) napíšeme ako riadky matice a zistíme jej hodnosť:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ -2R_1\\ -3R_1\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 7 & -3 & 3\\ 0 & 11 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot 3\\ \cdot 2\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 21 & -9 & 9\\ 0 & 22 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ -R_3\\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 11\\ 0 & 22 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +22R_2\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 11\\ 0 & 0 & -114 & 240\end{bmatrix}.$$

Pretože $h(A) = 3$, vektory sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu priestoru, ktorý generujú. ♡

Príklad 5.2.3 *Určme nejakú bázu priestoru* $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$ *nad* $\mathbb{R}$*, ktorá obsahuje vektory* $\overline{e_1} = (1,-2,4,3)$, $\overline{e_2} = (2,-4,3,5)$, $\overline{e_3} = (3,-6,2,2)$.

Riešenie. Vektory $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ zapíšeme ako riadky matice, ktorú upravíme na stupňovitý tvar. Potom doplníme štvrtý vektor tak, aby hodnosť vzniknutej matice bola 4.

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 5\\ 3 & -6 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ -2R_1\\ -3R_1\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & -10 & -7\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2R_2\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Štvrtý vektor bázy bude napríklad $\overline{e_4} = (0,1,0,0)$. ♡

Príklad 5.2.4 *Určme dimenziu lineárneho obalu množiny* $M = \{\overline{x_1} = (1,4,1,0), \overline{x_2} = (2,4,3,5),\ \overline{x_3} = (0,4,-1,-5),$ $\overline{x_4} = (-1,4,-3,-10)\}$ *a nájdime dve jeho bázy. Zistime, či vektory* $\overline{y_1} = (1,0,2,5),\ \overline{y_2} = (3,7,4,5)$ *sú z lineárneho obalu množiny* M.

Riešenie. Dimenzia $\mathcal{L}(M)$ sa rovná hodnosti matice A vytvorenej z vektorov $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & -3 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ \\ +R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 8 & -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \\ +2R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Teda $dim\mathcal{L}(M) = 2$. Bázou môže byť ľubovoľná dvojica z vektorov $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$, $\overline{x_4}$, napr.$B_1 = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}\},\ B_2 = \{\overline{x_1}, \overline{x_3}\}$. Ak máme rozhodnúť, či daný vektor je z $\mathcal{L}(M)$,vytvoríme maticu z bázových vektorov a daného vektora. Ak jej hodnosť je rovná dimenzii $\mathcal{L}(M)$, vektor je z $\mathcal{L}(M)$, v opačnom prípade vektor nie je z $\mathcal{L}(M)$.
Pre vektor $\overline{y_1}$ dostávame:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Keďže $h(C) = 2,\ \overline{y_1} \in \mathcal{L}(M)$.
Rovnakým spôsobom zistíme, že $\overline{y_2} \notin \mathcal{L}(M)$. ♡

Príklad 5.2.5 *Určme súradnice vektora* $\overline{x} = (-8,3,3)$ *v usporiadanej báze* $\overline{B} = (\overline{e_1} = (1,2,1),\ \overline{e_2} = (2,3,5),\ \overline{e_3} = (-1,2,4))$.

Riešenie. Označme $\overline{x}(\overline{B}) = (x_1, x_2, x_3)^\top$. Súradnice vektora v usporiadanej báze sú koeficienty lineárnej kombinácie bázových vektorov, ktorá sa rovná danému vektoru, teda musí platiť:
$x_1(1,2,1) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,2,4) = (-8,3,3)$.
Po roznásobení a porovnaní zložiek vektorov na oboch stranách rovnosti dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}.$$

Jej riešenie je $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4$, teda $\overline{x}(\overline{B}) = (2,-3,4)^\top$. ♡

Príklad 5.2.6 *Majme dve usporiadané bázy priestoru* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\overline{B} = (\overline{e_1} = (3,1,0),\ \overline{e_2} = (-1,1,2),\ \overline{e_3} = (2,2,3)),\ \overline{B'} = (\overline{e_1}' = (5,-1,-5),$ $\overline{e_2}' = (-2,6,12),\ \overline{e_3}' = (-7,-1,3))$. *Vypočítajme súradnice vektora* $\overline{x}$ *v báze* $\overline{B'}$, *ak* $\overline{x}(\overline{B}) = (3,5,2)^\top$.

Riešenie. Ak $\overline{x}(\overline{B}) = (3,5,2)^\top$, potom $\overline{x} = 3\overline{e_1} + 5\overline{e_2} + 2\overline{e_3} = 3(3,1,0) + 5(-1,1,2) + 2(2,2,3) = (8,12,16)$. Súradnice vektora $\overline{x}$ v usporiadanej báze $\overline{B'}$ nájdeme rovnakým postupom ako v Príklade 5.2.5.
Nech $\overline{x}(\overline{B'}) = (x_1', x_2', x_3')^\top$, potom
$x_1'(5,-1,-5) + x_2'(-2,6,12) + x_3'(-7,-1,3) = (8,12,16)$, čo vedie k sústave rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1' & - & 2x_2' & - & 7x_3' & = & 8 \\ -x_1' & + & 6x_2' & - & x_3' & = & 12 \\ -5x_1' & + & 12x_2' & + & 3x_3' & = & 16. \end{array}$$

Jej riešenie je $x_1' = 1,\ x_2' = 2,\ x_3' = -1$, teda $\overline{x}(\overline{B'}) = (1,2,-1)^\top$. ♡

Úlohy:

5.3 Zistite, či dané vektory tvoria bázu lineárneho priestoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$

a) $(4,3,6),\ (2,-1,0),\ (2,4,4),\ L = \mathbb{R}^3$

b) $(2,1,2,1),\ (1,0,-1,3),\ (6,4,3,-2),\ (-3,-3,2,6),\ L = \mathbb{R}^4$

c) $(1,3,4),\ (5,-7,3),\ (1,3,2),\ (2,4,3),\ L = \mathbb{R}^3$

d) $1+t,\ 1-t+t^2,\ 2t+t^2,\ L = P_{\leq 3}(\mathbb{R})$

e) $1+t,\ 1-t+t^2,\ 2t+t^2,\ L = P_{\leq 2}(\mathbb{R})$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ L = \mathbb{R}^{2\times 2}.$

5.4 Určte nejakú bázu daného priestoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje dané vektory

a) $L = \mathbb{R}^4,\ \overline{e_1} = (1,2,1,5),\ \overline{e_2} = (2,1,3,-2),\ \overline{e_3} = (-1,1,4,7)$

b) $L = \mathbb{R}^5,\ \overline{e_1} = (1,6,1,2),\ \overline{e_2} = (0,2,1,0)$

c) $L = P_{\leq 3}(\mathbb{R}),\ \overline{e_1} = 1+t,\ \overline{e_2} = t+t^3$

d) $L = P_{\leq 4}(\mathbb{R}),\ \overline{e_1} = 2+t+3t^2+2t^3,\ \overline{e_2} = 3t+2t^2+t^3,$
$\overline{e_3} = 2+t+3t^2+2t^3+t^4$

e) $L = \mathbb{R}^{2\times 2}, \overline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$

5.5 Je daný lineárny priestor $(L, +, \cdot)$. Určte dimenziu lineárneho obalu množiny $M \subset L$ a nájdite aspoň dve jeho bázy. Zistite, či vektor $\overline{y}$ je z lineárneho obalu množiny M.

a) $L = \mathbb{R}^4,\ M = \{\overline{x_1} = (6, 4, -5, 4),\ \overline{x_2} = (1, 0, 2, -4),\ \overline{x_3} = (5, 4, -7, 8),$ $\overline{x_4} = (7, 4, -3, 0)\},\ \overline{y} = (2, 0, 4, -8)$

b) $L = \mathbb{R}^5,\ M = \{\overline{x_1} = (1, 2, 0, 1, 0),\ \overline{x_2} = (1, 1, 3, 2, -2),$ $\overline{x_3} = (0, 2, 4, 3, -1),\ \overline{x_4} = (0, 0, 5, 1, -1),\ \overline{x_5} = (0, 1, -3, -2, 1)\},$ $\overline{y} = (3, 2, 1, 0, 1)$

c) $L = P_{\leq 3}(\mathbb{R}),\ M = \{\overline{x_1} = t + t^2,\ \overline{x_2} = 2t + 2t^2,\ \overline{x_3} = 1 + 3t + 2t^2 - t^3\},$ $\overline{y} = 1 + t - 2t^2 - t^3$

d) $L = \mathbb{R}^{2\times 2},\ M = \left\{\overline{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\right.$ $\left.\overline{x_4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right\},\ \overline{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

5.6 Určte súradnice vektorov $\overline{x}, \overline{y}$ v usporiadanej báze $\overline{B}$, ak

a) $\overline{B} = ((1, 1, 0),\ (2, 1, 1),\ (3, -1, 2)),\ \overline{x} = (-4, -3, -3),$ $\overline{y} = (1, 2, 1)$

b) $\overline{B} = ((1, 2, 1, 0),\ (2, 1, -1, 1),\ (3, 0, 0, 1),\ (6, 3, 0, 3)),\ \overline{x} = (17, 16, 2, 9),$ $\overline{y} = (15, 3, -6, 2)$

c) $\overline{B} = (1 + t^2 + t^3,\ t + t^2 + t^3,\ 1 + t + t^3,\ 1 + t + t^2),\ \overline{x} = -5t - 5t^2 + t^3,$ $\overline{y} = 6 + 5t + 4t^2 + 3t^3$

d) $\overline{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right),$ $\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix},\ \overline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$

5.7 Dané sú dve usporiadané bázy $\overline{B} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n})$, $\overline{B'} = (\overline{e_1}', \overline{e_2}', ..., \overline{e_n}')$. Vypočítajte súradnice vektora $\overline{x}$ v báze $\overline{B'}$, ak sú dané jeho súradnice v báze $\overline{B}$.

a) $n = 3,\ \overline{e_1} = (1, 0, 1),\ \overline{e_2} = (0, -1, 2),\ \overline{e_3} = (2, 4, 1),\ \overline{e_1}' = (7, 13, 2),$ $\overline{e_2}' = (6, 11, -2),\ \overline{e_3}' = (1, 3, 2),\ \overline{x}(\overline{B}) = (-1, 2, 9)^\top$

b) $n = 4,\ \overline{e_1} = (1, 2, 0, 1),\ \overline{e_2} = (2, 1, 1, 0),\ \overline{e_3} = (0, 1, 1, 2),\ \overline{e_4} = (-1, 1, 2, 0),$ $\overline{e_1}' = (1, -3, -12, 4),\ \overline{e_2}' = (8, 7, -3, 4),\ \overline{e_3}' = (4, 4, 6, -2),$ $\overline{e_4}' = (4, -6, 25, 1),\ \overline{x}(\overline{B}) = (3, 0, 4, -3)^\top$

c) $n = 4,\ \overline{e_1} = 1 - t + t^2 + t^3,\ \overline{e_2} = t - 2t^2 + 3t^3,\ \overline{e_3} = 2 + 3t^2 - t^3,$
$\overline{e_4} = -1 - 2t - 2t^2 + 2t^3,\ \overline{e_1}' = 1 - 5t + 4t^3,$
$\overline{e_2}' = 6 - 4t + 3t^2 + 9t^3,$
$\overline{e_3}' = -2+6t-8t^2+7t^3,\ \overline{e_4}' = -1+t-11t^2+17t^3,\ \overline{x}(\overline{B}) = (16, 4, 3, 6)^\top$

d) $n = 4,\ \overline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \overline{e_2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \overline{e_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$
$\overline{e_4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{e_1}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix},\ \overline{e_2}' = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 7 & -2 \end{bmatrix},\ \overline{e_3}' = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix},$
$\overline{e_4}' = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 2 & -6 \end{bmatrix},\ \overline{x}(\overline{B}) = (11, 17, 8, 3)^\top.$

Výsledky:

5.3

a) áno
b) nie
c) nie
d) nie
e) áno
f) áno

5.4

a) $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ a napr. $\overline{e_4} = (0, 0, 0, 1)$

b) $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$ a napr. $\overline{e_3} = (0, 0, 1, 0),\ \overline{e_4} = (0, 0, 0, 1)$

c) $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$ a napr. $\overline{e_3} = t^2,\ \overline{e_4} = t^3$

d) $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ a napr. $\overline{e_4} = t^2,\ \overline{e_5} = t^3$

e) $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$ a napr. $\overline{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5.5

a) $dim\mathcal{L}(M) = 2,\ B_1 = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}\}, B_2 = \{\overline{x_2}, \overline{x_4}\},\ \overline{y} \in \mathcal{L}(M)$

b) $dim\mathcal{L}(M) = 3,\ B_1 = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_4}\},\ B_2 = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_5}\},\ \overline{y} \notin \mathcal{L}(M)$

c) $dim\mathcal{L}(M) = 2,\ B_1 = \{\overline{x_1}, \overline{x_3}\}, B_2 = \{\overline{x_2}, \overline{x_3}\},\ \overline{y} \in \mathcal{L}(M)$

d) $dim\mathcal{L}(M) = 2,\ B_1 = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}\}, B_2 = \{\overline{x_2}, \overline{x_3}\},\ \overline{y} \notin \mathcal{L}(M)$

5.6

a) $\overline{x}(\overline{B}) = (3, -5, 1)^\top,\ \overline{y}(\overline{B}) = (-2, 3, -1)^\top$

b) $\overline{x}(\overline{B}) = (2, 0, -3, 4)^\top,\ \overline{y}(\overline{B}) = (-1, 5, 2, 0)^\top$

c) $\overline{x}(\overline{B}) = (2, -3, 2, -4)^\top,\ \overline{y}(\overline{B}) = (1, 0, 2, 3)^\top$

d) $\overline{x}(\overline{B}) = (3, -1, 1, 4)^\top,\ \overline{y}(\overline{B}) = (-3, 0, 2, 0)^\top$

5.7

a) $\overline{x}(\overline{B'}) = (3, -1, 2)^\top$

b) $\overline{x}(\overline{B'}) = (2, 1, 0, -1)^\top$

c) $\overline{x}(\overline{B'}) = (-1, 2, -4, 3)^\top$

d) $\overline{x}(\overline{B'}) = (3, 2, -1, 4)^\top$

5.3 Vlastné čísla a vlastné vektory matice

Príklad 5.3.1 *Vypočítajme vlastné čísla a vlastné vektory matice A na množine $\mathbb{R}$*

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riešenie.

a) K matici A prislúcha charakteristická rovnica $|A - \lambda E| = 0$. V našom prípade po úpravách

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dostávame rovnicu $-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$. Jej riešením sú vlastné čísla λ zodpovedajúce matici A, t.j. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. K nim prislúchajúce vlastné vektory nájdeme postupne ako riešenia homogénnej sústavy algebraických rovníc $(A - \lambda E)\,\overline{x} = \overline{0}$. Pre hodnotu $\lambda_1 = 1$ dostávame sústavu

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy (viď kapitola *Sústavy lineárnych rovníc* podkapitola *Homogénna sústava*) sústavu vyriešime. V tomto prípade sú riešením vektory $\overline{x} = t\,(1, 1, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Analogicky postupujeme pre vlastnú hodnotu $\lambda_2 = 2$. Jej vlastné vektory $\overline{x} = t\,(0, -1, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, sú riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nakoniec nájdeme vlastné vektory ku hodnote $\lambda_3 = -2$ ako riešenie sústavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dostávame $\overline{x} = t\,(-2, 1, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Charakteristická rovnica má tvar

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

t.j. $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 0$. Jej jediným riešením na množine reálnych čísel je $\lambda = 2$. Zodpovedajúce vlastné vektory $\overline{x} = t\,(0, 0, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, nájdeme ako riešenie sústavy

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

♡

Príklad 5.3.2 *Vypočítajme vlastné čísla a vlastné vektory matice A na množine $\mathbb{C}$*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riešenie. V predchádzajúcom príklade sme k tejto matici našli charakteristickú rovnicu $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 0$. Tentokrát nás zaujímajú všetky jej riešenia. Okrem reálneho koreňa $\lambda_1 = 2$, ku ktorému sme vlastné vektory $\overline{x} = t\,(0, 0, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, našli v predchádzajúcom príklade, má rovnica dvojicu komplexne združených koreňov $\lambda_2 = 2 + 2i$ a $\lambda_3 = 2 - 2i$. K nim prislúchajúce vlastné vektory nájdeme analogicky riešením zodpovedajúcich sústav algebraických rovníc. V prípade vlastnej hodnoty $\lambda_2 = 2 + 2i$ je to sústava

$$\begin{bmatrix} -2-2i & 2 & 0 \\ -4 & 2-2i & 0 \\ -2 & 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ktorej riešením sú vektory $\overline{x} = t\,(1-i, 2, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. V prípade vlastnej hodnoty $\lambda_3 = 2-2i$ je to sústava

$$\begin{bmatrix} -2+2i & 2 & 0 \\ -4 & 2+2i & 0 \\ -2 & 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ktorej riešením sú vektory $\overline{x} = t\,(1+i, 2, 1)^\top$, kde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. ♡

Úlohy:

5.8 Vypočítajte vlastné čísla a vlastné vektory matice A na množine $\mathbb{R}$

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$

5.9 Vypočítajte vlastné čísla a vlastné vektory matice A na množine $\mathbb{C}$

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

Výsledky:

5.8

a) $-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0$	$\lambda=-1$	$\overline{x}=t\,(-1,-1,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
b) $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t\,(1,-1,-2)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=2$	$\overline{x}=t\,(0,1,2)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=3$	$\overline{x}=t\,(0,0,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
c) $-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=(t-s,t,s)^\top$, kde $(t,s)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
	$\lambda_2=3$	$\overline{x}=t\,(-1,1,0)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
d) $-\lambda^3+6\lambda^2-15\lambda+18=0$	$\lambda=3$	$\overline{x}=t\,(2,0,1)^\top$,kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
e) $-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8=0$	$\lambda=2$	$\overline{x}=(t,2t,s)^\top$, kde $(t,s)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
f) $-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t\,(1,2,-1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=3$	$\overline{x}=t\,(1,0,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=4$	$\overline{x}=t\,(0,0,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
g) $-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t\,(-2,-1,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=3$	$\overline{x}=t\,(3,4,2)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=-3$	$\overline{x}=t\,(0,-1,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
h) $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t\,(1,0,0)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=2$	$\overline{x}=t\,(1,1,0)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=3$	$\overline{x}=t\,(0,-2,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
i) $-\lambda^3+\lambda^2=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t(1,1,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=0$	$\overline{x}=t\,(1,2,3)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
j) $-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=0$	$\lambda_1=-1$	$\overline{x}=t(-2,1,0)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=3$	$\overline{x}=t\,(1,-1,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$

5.9

a) $-\lambda^3+3\lambda^2-\lambda+3=0$	$\lambda_1=3$	$\overline{x}=t\,(10,1,7)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=i$	$\overline{x}=t\,(0,i,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=-i$	$\overline{x}=t\,(0,-i,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
b) $-\lambda^3+5\lambda^2-17\lambda+13=0$	$\lambda_1=1$	$\overline{x}=t\,(1,2,1)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_2=2+3i$	$\overline{x}=t\,(3-3i,5-3i,4)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$
	$\lambda_3=2-3i$	$\overline{x}=t\,(3+3i,5+3i,4)^\top$, kde $t\in\mathbb{R}-\{0\}$

Literatúra

[1] M. Bučko, J. Buša, Š. Schrötter, *Lineárna algebra*, Elfa, Košice 2001.

[2] J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1*, Alfa, Bratislava 1985.

[3] V. Havel, J. Holenda, *Lineární algebra*, SNTL, Praha 1984.

[4] A. Hlaváček, *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky*, SPN, Praha 1965.

[5] P. Kaprálik, J. Tvarožek, *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava 1987.

[6] R. E. Larson, B. H. Edwards, *Finite Mathematics with Calculus*, D. C. Heath and Co., Lexington 1991.

[7] V. P. Minorskij, *Sbírka úloh z vyšší matematiky*, SNTL, Praha 1964.

[8] V. Šoltés, Z. Juhásová, *Zbierka úloh z vyššej matematiky* I., Elfa, Košice 1995.