Úvod do predmetu MATEMATIKA 1

Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.

Predslov

Táto učebná pomôcka je zameraná na riešenie úloh, ktoré sú zahrnuté do učebných plánov predmetu MATEMATIKA 1 a tvoria náplň prvých troch cvičení z tohto predmetu.

Sústavy lineárnych rovníc, matice a determinanty

Úlohy vedúce k pojmu matice

Uvedieme jednoduché príklady:

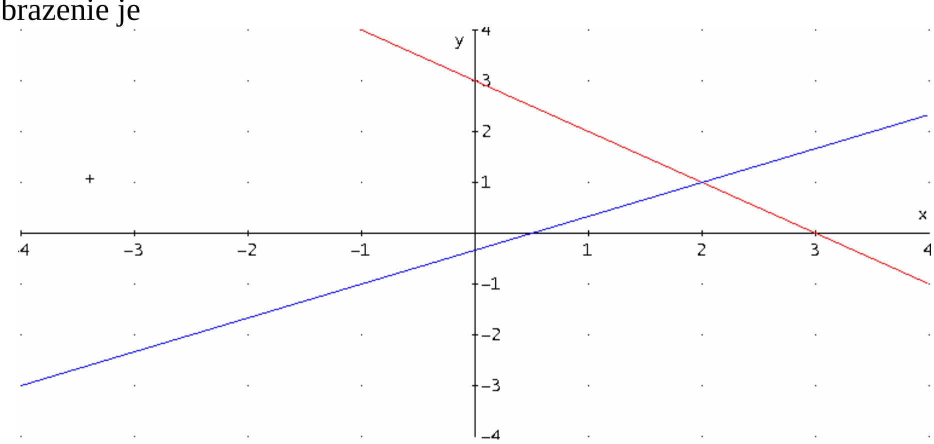
Príklad 1 Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$2x - 3y = 1,$$
$$x + y = 3.$$

Riešenie: Použijeme eliminačnú metódu známu už zo strednej školy. Môžeme vymeniť poradie rovníc (je to výhodné)

$$x + y = 3,$$
$$2x - 3y = 1$$

Grafické zobrazenie je



a) Ku druhej rovnici pripočítame -2 násobok rovnice prvej

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 3 \; (-2)$$
$$2 \cdot x - 3 \cdot y = 1 \;\; \hookleftarrow$$

Dostávame upravenú sústavu rovníc, ktorá má to isté riešenie ako pôvodná sústava

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 3$$
$$0 \cdot x - 5 \cdot y = -5$$

Teraz už máme jednoduchú sústavu rovníc. Z druhej rovnice vypočítame $y = 1$. Dosadením do prvej rovnice dostávame $x + 1 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

b) Pri väčšom počte rovníc nám takéto riešenie spôsobuje problémy s prehľadnosťou. Výhodné je zapísať rovnice pomocou vhodnej schémy do riadkov a stĺpcov. Koeficienty pri neznámych *x*, *y* môžeme zapísať takto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vytvorili sme maticu o 2 riadkoch a 2 stĺpcoch. Vytvoríme si rozšírenú maticu $\mathbf{A}'$ o pravé strany rovnice

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Úpravy (eliminácia) môžeme teraz robiť podobne, ako sme ich robili so sústavou v pôvodnom zápise

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-2) \\ \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1\cdot x + 1\cdot y = 3 \\ 0\cdot x - 5\cdot y = -5 \end{array}$$

Dostali sme sústavu, ktorú sme už riešili v časti a). Podobne môžeme postupovať aj pri riešení väčšieho počtu rovníc.

Uvedieme niektoré **základné vlastnosti matíc**, ktoré môžeme efektívne využiť napríklad pri riešení sústav lineárnych rovníc.

Maticou typu $m\times n$ rozumieme sústavu prvkov zapísaných do tabuľky (schémy) s m riadkami a n stĺpcami (m, n sú prirodzené čísla).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde a_{ij} sú prvky matice, $i = 1,2,\dots,m,$ a $j = 1,2,\dots,n$. Používame tiež skrátené označenie $\mathbf{A} = (a_{ij})$ **.**

- Budeme hovoriť, že **matice** sú **rovnakého typu**, ak ide o matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov .
- Ak z matice **A** vynecháme niektoré riadky a stĺpce, dostaneme **submaticu** matice **A.**
- Ak počet riadkov matice **A** je rovný počtu jej stĺpcov a je ich *n*, matica **A** sa nazýva **štvorcová matica stupňa** n **.**
- Maticu s jedným riadkom nazývame **riadkový vektor** alebo riadková matica typu $1\times n$.
- **Stĺpcový vektor** alebo stĺpcová matica je matica typu $m\times 1$.
- Nech $\mathbf{a_1},\dots,\mathbf{a_n}$ sú vektory a $k_1,\dots,k_n$ konštanty, potom vektor $\mathbf{x} = k_1\cdot\mathbf{a}_1 + \dots + k_n\cdot\mathbf{a}_n$ je **lineárnou kombináciou** vektorov $\mathbf{a_1},\dots,\mathbf{a_n}$.
- **Nulová matica** má všetky prvky rovné nule.
- **Štvorcová matica** má rovnaký počet riadkov a stĺpcov.
- **Diagonálna matica** je štvorcová matica s nulami mimo hlavnej diagonály.
- **Jednotková matica** (označenie **I** alebo **E**) je diagonálna matica so samými jednotkami na hlavnej diagonále.
- **Symetrická matica** je štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $a_{ij} = a_{ji}$.

- **Transponovanou maticou** k matici **A** nazývame maticu $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$**.**

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Horná trojuholníková matica** je štvorcová so samými nulami pod hlavnou diagonálou.

Poznámka. Príklady na riešenie nájdeme na http://web.tuke.sk/fei-km/LA/ULAzbierka.pdf

Operácie s maticami

Na množine všetkých matíc rovnakého typu definujeme **operáciu sčítania matíc**, po odpovedajúcich prvkoch. Teda, ak $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, tak $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Napríklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 & -2+3 \\ -2+3 & 3+(-2) & 2+4 \end{pmatrix}.$$

Ak k je číslo (skalár), tak ***k* – násobkom matice** $\mathbf{A} = (a_{ij})$ rozumieme maticu rovnakého typu $\mathbf{B} = k\mathbf{A} = (ka_{ij})$.

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Súčin **A.B** matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ s maticou $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $n \times p$ budeme definovať ako maticu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Príklad: Ak matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, tak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + (-3) \cdot y \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix}$

Sústavu rovníc

$$2x - 3y = 1,$$
$$x + y = 3,$$

Môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x + (-3) \cdot y \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Poznámka. Príklady na riešenie nájdeme na http://web.tuke.sk/fei-km/LA/ULAzbierka.pdf

Ekvivalentnou riadkovou (resp. stĺpcovou) úpravou matice nazývame každú z nasledujúcich úprav matice:
1. zmenu poradia riadkov (resp. stĺpcov),
2. vynásobenie riadka (resp. stĺpca) nenulovým skalárom,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie niektorých riadkov (resp. stĺpcov) k inému riadku (resp. stĺpcu).

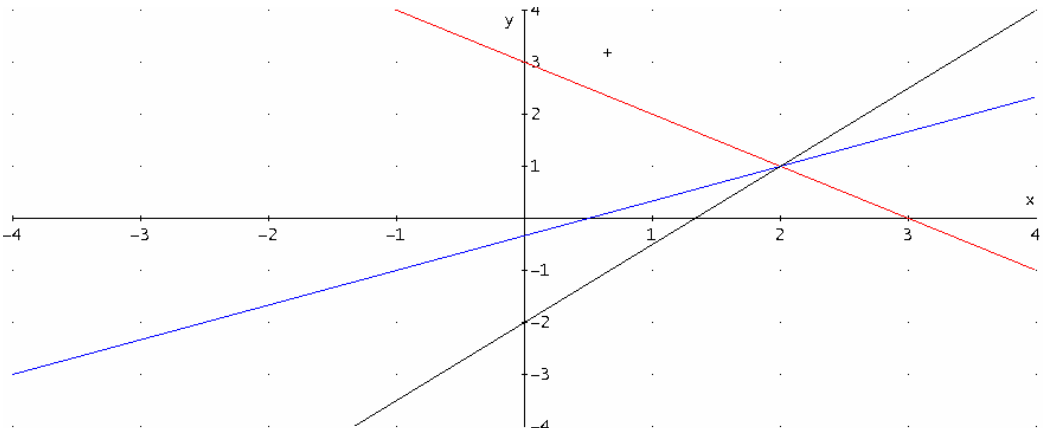
Dve matice **A** a **B** budeme nazývať riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné (equivalent) práve vtedy, keď jednu z matíc možno previesť na druhú sériou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav. Túto reláciu budeme zapisovať takto $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Matice nazveme ekvivalentnými práve vtedy, keď jednu z matíc možno previesť na druhú sériou ekvivalentných (riadkových alebo stĺpcových) úprav.

Príklad 2 Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1, \\ x + y &= 3, \\ 3x - 2y &= 4. \end{aligned}$$

Riešenie: Grafické zobrazenie je



Pomocou matíc:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} (-2) \quad (-3) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\quad \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 0 \cdot x - 5 \cdot y &= -5 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

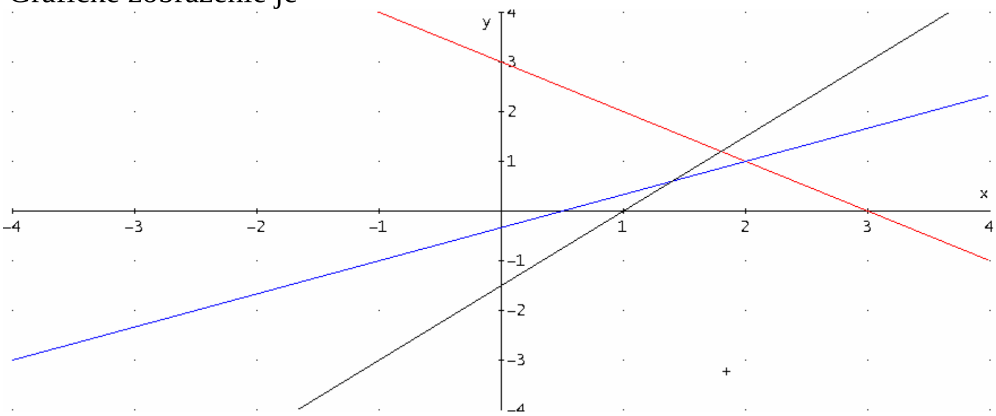
Riešenie je také ako v časti a), x=2, y=1.

Poznámka. V prípade, ak hlavný prvok nie je rovný 1 (resp. −1) a ani vhodnou výmenou riadkov (resp.) stĺpcov sa to nedá dosiahnuť, je výhodné vhodnou lineárnou kombináciou riadkov hodnotu 1 (resp. −1) dostať. Nie je to ale nevyhnutné v prípade, ak sú všetky uvažované hodnoty v danom stĺpci násobkami jednej z nich.

Príklad 3 Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1, \\ x + y &= 3, \\ 3x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

Riešenie: Grafické zobrazenie je



Vidíme, že grafy nemajú spoločný bod a teda neexistuje riešenie danej sústavy.
Riešením pomocou matíc:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{ll} (-2) & (-3) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

dostávame sústavu rovníc

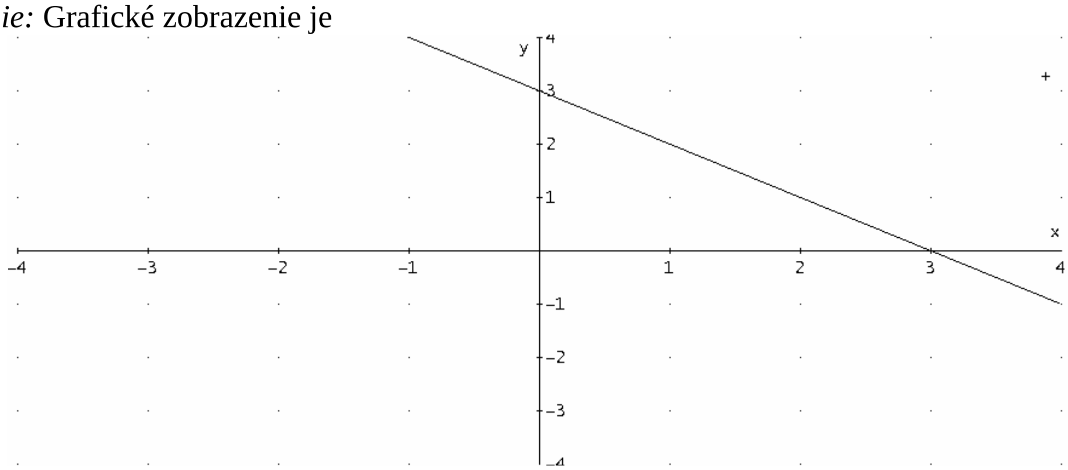
$$x + y = 3$$
$$0 \cdot x - 5 \cdot y = -5$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = -1$$

V tretej rovnici je $0 = -1$, čo nie je pravda. Sústava nemá riešenie.

Príklad 4 Riešme sústavu lineárnych rovníc

$$x + y = 3,$$
$$2x + 2y = 6,$$
$$3x + 3y = 9.$$

Riešenie: Grafické zobrazenie je



Grafy všetkých priamok sú totožné, teda sústava má nekonečne mnoho riešení.
Riešením pomocou matíc

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{ll} (-2) & (-3) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \end{array}$$

Dostávame sústavu rovníc

$$x + y = 3$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

To znamená, že máme iba jednu rovnicu o dvoch neznámych $x + y = 3$. Sústava má riešenie $y = t, \quad x = 3 - t$ pre ľubovoľné reálne t. Teda sústava má nekonečne veľa riešení v závislosti na parametri *t*.

Čo sme zistili z riešenia sústav rovníc z príkladov 2 až 4:

- V príklade 2 po úprave matica $\mathbf{A}$ a rozšírená matica $\mathbf{A}'$ majú rovnaký počet nenulových riadkov rovný 2, čo je aj počet neznámych. Budeme hovoriť, že matice majú rovnakú hodnosť rovnú 2, rovnú počtu neznámych. Zapíšeme to takto $h(A) = h(A')$. Sústava má jediné riešenie.
- V príklade 3 po úprave matica $\mathbf{A}$ má $h(A) = 2$ a rozšírená matica $\mathbf{A}'$ má hodnosť $h(A') = 3$. Ak $h(A) \neq h(A')$, sústava nemá riešenie.
- V príklade 4 po úprave matica $\mathbf{A}$ má $h(A) = 1$ a rozšírená matica $\mathbf{A}'$ má hodnosť $h(A') = 1$. Ak $h(A) = h(A')$ a je menšia ako počet neznámych, sústava má nekonečne mnoho riešení.

Presnejšie sú tieto tvrdenia zahrnuté vo Frobeniovej vete.

Riešme sústavu rovníc

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Vynásobením 1. rovnice s a_{22} , druhej s $-a_{12}$ a sčítaním dostávame

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 .$$

Vynásobením 1. rovnice s $-a_{21}$, druhej s a_{11} a sčítaním dostávame

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 .$$

Ak zavedieme označenie

$$D = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \quad D_1 = (b_1a_{22} - a_{12}b_2), \quad D_2 = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)$$

Dostávame riešenie v tvare

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} .$$

Determinant, výpočet

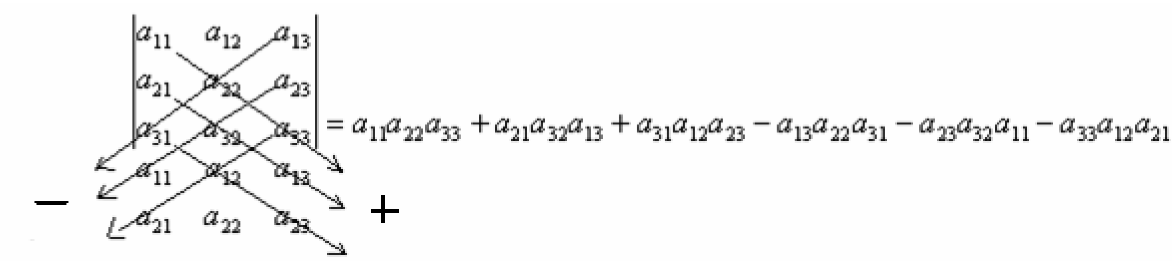
Nech je daná štvorcová matica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n- tého stupňa. Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ môžeme priradiť číslo, ktoré nazývame **determinant matice** $\mathbf{A} = (a_{ij})$, a ktoré označujeme $\det\mathbf{A}$, alebo $|\mathbf{A}|$. Determinant definujeme takto:

- Determinant druhého stupňa má dva členy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Determinant tretieho stupňa má 6 členov:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$



- Determinant n-tého stupňa:

Subdeterminantom (minorom) D_{ij} prvku a_{ij} matice **A** nazývame determinant submatice, ktorá vznikne z matice **A** vynechaním i- tého riadku a j – tého stĺpca.

Algebrickým doplnkom A_{ij} prvku a_{ij} nazývame číslo $(-1)^{i+j} D_{ij}$.

Determinant $|\mathbf{A}|$ matice **A** môžeme vypočítať rozvojom podľa prvkov ľubovoľného i-tého riadku

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Ak $|\mathbf{A}| \neq 0$ hovoríme, že **matica je regulárna**. Ak $|\mathbf{A}| = 0$, tak matica sa nazýva **singulárna**.

Niektoré vlastnosti determinantov (predpoklad štvorcové matice**):**

- $|\mathbf{A}^{\mathbf{T}}| = |\mathbf{A}|$.
- Ak jeden riadok matice **A** (t.j. všetky prvky tohto riadku) vynásobíme číslom k, hodnota determinantu sa k krát zväčší (podobne pre stĺpce). Ak napríklad s číslom k vynásobíme druhý riadok, tak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

- Ak v determinante zameníme dva riadky, zmení sa znamienko determinantu (podobne pre stĺpce). Nech v matici **A** je jeden riadok lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov. Potom $|\mathbf{A}| = 0$.
- Determinant, v ktorom jeden riadok je násobkom druhého, je rovný nule (podobne pre stĺpce).
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.

Všeobecne pre sústavu n lineárnych rovníc o n neznámych tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Potom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ak

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ a } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots, \; D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

tak

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Tejto metóde hovoríme Cramerovo pravidlo.

Inverzné matice

Sústavu lineárnych rovníc môžeme zapísať tiež v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

alebo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tento zápis nám pripomína jednu rovnicu o jednej neznámej $a \cdot x = b$, kde a, b sú reálne čísla Rovnicu môžeme riešiť takto:

$$\begin{gathered} a \cdot x = b \,/\, a^{-1} \\ a^{-1} a \cdot x = a^{-1} b \\ 1 \cdot x = a^{-1} b \\ x = a^{-1} b \end{gathered}$$

Tento postup pri dodržaní podmienok o násobení matíc môžeme použiť aj na sústavu lineárnych rovníc, ktorá má jediné riešenie, kde $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{A}$.

Teda
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

K regulárnej matici **A** (t.j. $|\mathbf{A}| \neq 0$) existuje vždy matica $\mathbf{A}^{-1}$, nazývame ju **inverzná matica** k matici **A,** pričom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ (**E** je jednotková matica) a

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \text{, pričom}$$

$$adj\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$ sa nazýva **adjungovaná matica** k matici ***A***.

Príklad 5 Vypočítajme inverznú maticu k danej matici.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

a) Determinant matice |A| = 0, t.j. matica je singulárna a teda inverzná matica k nej neexistuje.

b) Determinant matice |B| = -3, t.j. matica je regulárna a teda inverzná matica k nej existuje. Nájdeme ju pomocou **adjungovanej matice** .

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 4 & (-1)^{1+2} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 2 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Podobne ako v b) dostávame |C | = 6 a

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Predchádzajúci výpočet ukázal, že časová náročnosť výpočtu pre maticu stupňa 3 je podstatne vyššia, ako bola pre maticu stupňa 2. V prípade matice D by to dokonca znamenalo vyčíslenie jedného determinantu stupňa 4 a 16 determinantov stupňa 3. Preto použijeme pre výpočet inverznej matice Gaussovu eliminačnú metódu. Napíšeme si blokovú maticu $(D|E)$ a pomocou lineárnej kombinácie riadkov ju upravíme tak, aby prvou maticou bola jednotková matica, potom dostávame maticu $(E|D^{-1})$. Teda

$$(D|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\2&1&1&1&0&1&0&0\\3&2&1&1&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2R_1\\-3R_1\\-4R_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&-1&-1&-2&1&0&0\\0&-1&-2&-2&-3&0&1&0\\0&-1&-2&-3&-4&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\-R_2\\-R_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&-1&-1&-2&1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&-2&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-1)\\ \\-R_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&2&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&-1&1&0\\0&0&0&-1&-8&0&2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&2&-1&0&0\\0&0&1&1&1&1&-1&0\\0&0&0&1&1&0&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}-R_2\\-R_3\\-R_4\\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&1&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&1&0&1&-1\end{array}\right)$$

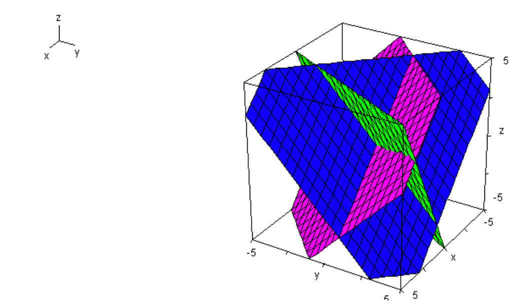
kde pred čiarou je umiestnená jednotková matica príslušného stupňa a za čiarou inverzná matica k matici D.

Príklady sústav 3 rovníc o 3 neznámych riešené eliminačnou metódou, Cramerovým pravidlom a pomocou inverznej matice.

Príklad 6 Pomocou eliminačnej metódy, Cramerovho pravidla a pomocou inverznej matice riešme sústavu rovníc

$$x+y+z=3$$
$$x-y+z=1$$
$$2x-y-z=0$$

V grafickom zobrazení sú to tri roviny, ktoré majú jeden spoločný bod (riešenie sústavy).



Riešenie:

- *Pomocou eliminačnej metódy:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Dostali sme sústavu:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ y \quad &= 1 \\ y+z &= 2 \end{aligned}$$

Z druhej rovnice dostávame $y=1$. Dosadením známej hodnoty $y=1$ do poslednej rovnice, dostávame $z=1$. A dosadením $y=1$ a $z=1$ do prvej rovnice dostaneme $x=1$.

- *Pomocou Cramerovho pravidla:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Teda $x = D_x / D = 1$, $y = D_y / D = 1$, $z = D_z / D = 1$.

- *Pomocou inverznej matice* (na výpočet inverznej matice použijeme eliminačnú metódu pomocou rozšírenej matice sústavy o jednotkovú maticu):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) :(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +3R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -R_2 + 1/3R_3 \\ \\ :(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{array}\right) = \left(E \middle| A^{-1}\right).$$

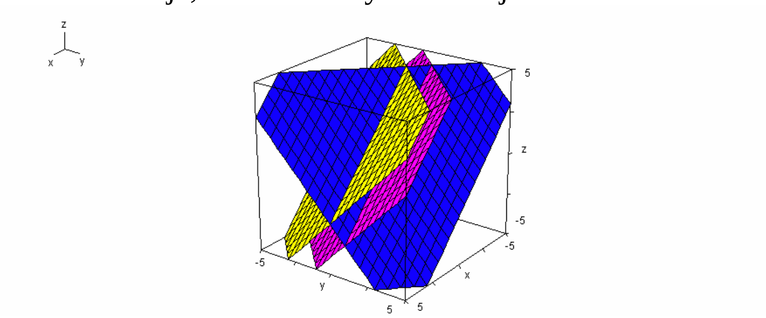
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teda $x=1, y=1, z=1$.

Príklad 7 Pomocou eliminačnej metódy riešme sústavu rovníc

$$x+y+z=3$$
$$x-y+z=1$$
$$x-y+z=3$$

Grafické zobrazenie nám ukazuje, že dve roviny sú navzájom rovnobežné.



Riešenie:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-2) \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dostávame sústavu:

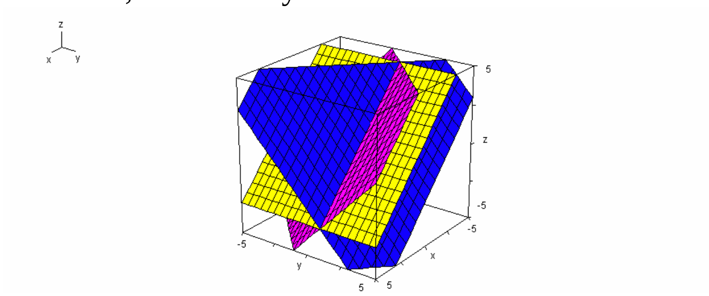
$$x+y+z=3$$
$$y \quad =1$$
$$0\cdot z=2$$

Posledná rovnosť neplatí, teda sústava nemá riešenie.

Príklad 8 Pomocou eliminačnej metódy riešme sústavu rovníc

$$x+y+z=3$$
$$x-y+z=1$$
$$x-0.y+z=2$$

V grafickom zobrazení vidíme, že tri roviny tvoria tzv. zväzok rovín.



Riešenie:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-2) \\ -1/2R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostávame sústavu:

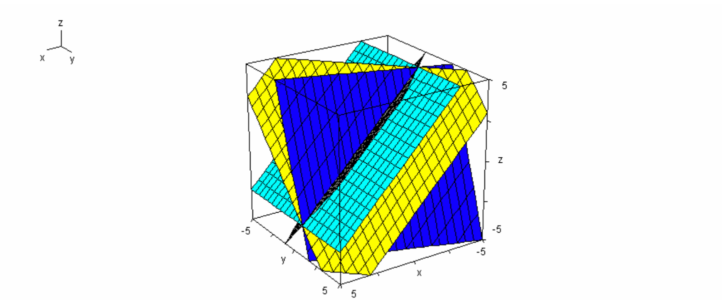
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Dosadením $y = 1$ do prvej rovnice dostávame

$x + 1 + z = 3 \Rightarrow x = 2 - z$ **.** Teda neznáma z môže byť ľubovoľné reálne číslo. Riešenie môžeme zapísať tiež takto: $x = 2 - t, y = 1, z = t$, kde $t \in R$.

Príklad 9 Pomocou eliminačnej metódy riešme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} &x + y + z = 3 \\ &x - y + z = 1 \\ &x - 0.y + z = 2 \\ &x + 3y + z = 5 \\ &2x + 0.y + 2z = 4 \end{aligned}$$



Riešenie:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :(-1) \\ :2 \\ :(-1/2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_2 \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostávame sústavu ako v predošlom príklade $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y \qquad &= 1 \end{aligned}$.

Polynómy a algebrické rovnice druhého stupňa

Príklady kvadratických rovníc:

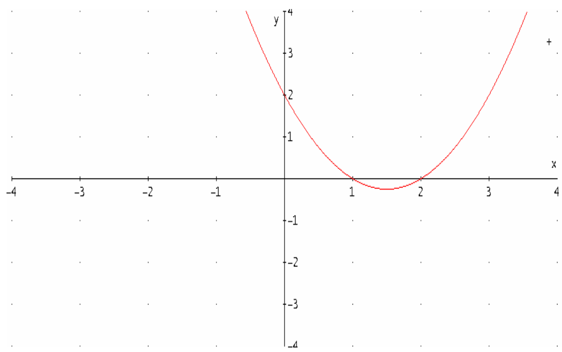
P1

$y = x^2 - 3x + 2 \qquad (\, y = ax^2 + bx + c\,)$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (\, ax^2 + bx + c = 0\,)$

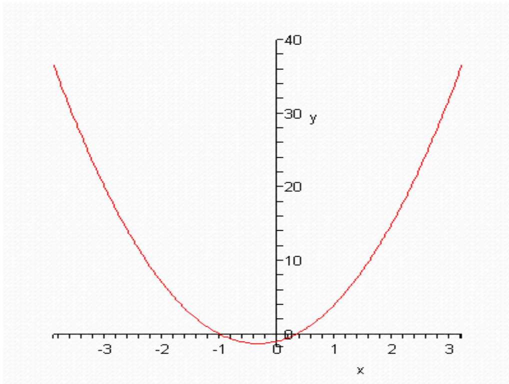
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



$y = P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 1 \cdot (x - 2)(x - 1)$

P2



$y = 3x^2 + 2x - 1$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

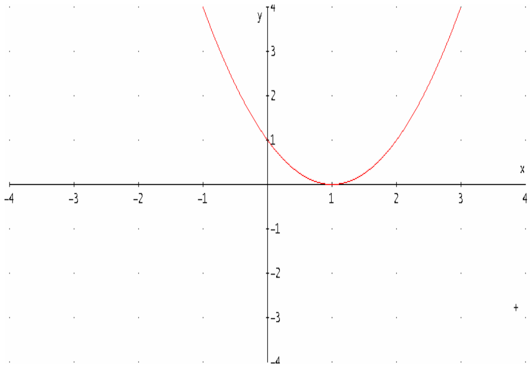
$D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 1/3 \\ -1 \end{cases}$$

$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) =$

$= 3 \cdot [x - 1/3][x - (-1)] = 3x^2 + 2x - 1$

P3



$y = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

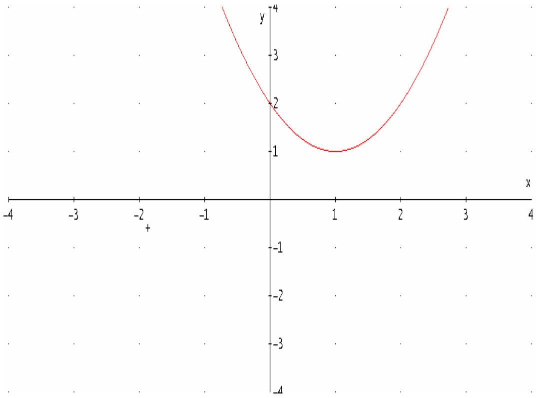
$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) =$

$= 1 \cdot (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$

P4



$y = x^2 - 2x + 2$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \begin{cases} 1 + i \\ 1 - i \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 1 \cdot [x - (1 + i)] \cdot [x - (1 - i)]$$

Číslo i je riešením kvadratickej rovnice $x^2 + 1 = 0$ (rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel). Teda $i^2 = -1$.

Uvedieme niektoré ***základné vlastnosti komplexných čísel:***

Algebrický tvar komplexného čísla z je $z = a + b \cdot i$, kde a, b sú reálne konštanty. Obrazom komplexného čísla z (v tzv. Gaussovej rovine) je bod $[a, b]$. Obrazom komplexného čísla i (nazývame ho **imaginárna jednotka**) je bod $[0,1]$.

Komplexne združeným číslom k číslu z je číslo $\bar{z} = a - b \cdot i$

Operácie s komplexnými číslami

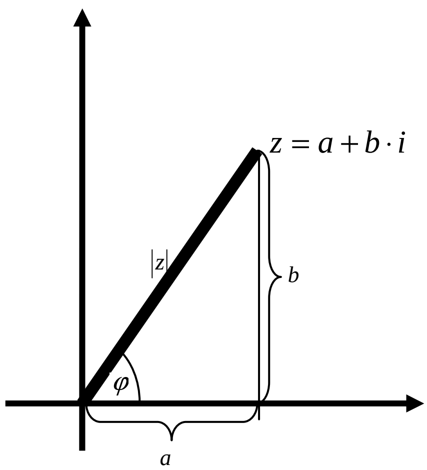
Nech $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$, potom

- $z_1 + z_2 = a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$
- $z_1 - z_2 = a_1 + b_1 \cdot i - (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$

Na základe operácie násobenia platí: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1 \ldots$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2 \cdot i^2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 - b_2^2 \cdot i^2} =$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Trigonometrický tvar komplexného čísla



Z obrázku dostávame **absolútnu hodnotu (modul)** komplexného čísla
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
Ďalej $a = |z| \cos\varphi$, $b = |z| \sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.
Odtiaľ dostávame
$$z = a + b \cdot i = |z| \cos\varphi + i \cdot |z| \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) .$$

$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ je tzv. **trigonometrický (goniometrický)** tvar komplexného čísla. Číslo $0 \le \varphi \le 2\pi$ sa nazýva **argumentom (amplitúdou) čísla** z.

V elektrotechnických predmetoch sa často stretávame s tzv. **exponenciálnym tvarom** komplexného čísla. Platí (Eulerov vzťah)

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi .$$

Teda exponenciálny tvar komplexného čísla z je

$$z = |z| e^{i \cdot \varphi}$$

- Ak $z_1 = |z_1| e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \cdot \varphi_2}$, tak $z_1 z_2 = |z_1| e^{i \cdot \varphi_1} |z_2| e^{i \cdot \varphi_2} = |z_1||z_2| e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Ak $z_1 = |z_1| e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \cdot \varphi_2}$, tak $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1| e^{i \cdot \varphi_1}}{|z_2| e^{i \cdot \varphi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$
- Ak $z = |z| e^{i \cdot \varphi}$, tak $z^n = \left(|z| e^{i \cdot \varphi}\right)^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \varphi}$.
- Ak $z = |z| e^{i \cdot \varphi}$, tak tiež je

$z = |z| e^{i \cdot \varphi} = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)) = |z| e^{i \cdot (\varphi + 2k\pi)}$.

- Ak $\sqrt[n]{z} = a = |a| e^{i \cdot \psi}$, tak $z = |z| e^{i \cdot (\varphi + 2k\pi)} = a^n = |a|^n e^{i \cdot n \psi}$.

Porovnaním dostávame

$$|z| = |a|^n \Rightarrow |a| = \sqrt[n]{|z|}, \ \varphi + 2k\pi = n \cdot \psi$$

Rovnica $z = a^n$ má n riešení. Tieto riešenia odpovedajú hodnotám

$$\psi_1 = \frac{\varphi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{n}, \quad \psi_1 = \frac{\varphi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{n}, \dots, \psi_n = \frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n} \quad .$$

Teda všetky hodnoty ležia na kružnici o polomere $r = \sqrt[n]{|z|}$.

Poznámka. Bližšie o komplexných číslach na: http://web.tuke.sk/fei-km/index.php?page=ula
http://web.tuke.sk/fei-km/LA/ULAzbierka.pdf

Polynómy a algebrické rovnice n-tého stupňa

Podobne ako v predchádzajúcej časti, budeme postupovať pri polynómoch a algebrických rovniciach n-tého stupňa. Nech n je prirodzené číslo. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n$ (koeficienty polynómu) sú komplexné čísla . Výraz

$$y = P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

nazývame **polynómom** v premennej x. Ak $a_n \neq 0$, tak číslo n je **stupeň polynómu.** Koeficient a_0 sa nazýva **absolútny člen.**

Uvedieme niektoré **základné vlastnosti polynómov**.

Majme dva polynómy

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$Q_n(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

- Dva polynómy $P_n(x), Q_n(x)$ **sa rovnajú,** ak sú rovnakého stupňa a majú rovnaké koeficienty ($a_i = b_i$).

- Dva polynómy $P_n(x), Q_n(x)$ **sa rovnajú,** ak majú rovnaké hodnoty pre každé *x*.
- Nech $P_m(x), Q_n(x)$ sú polynómy. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x), R(x)$ také, že platí:
  a) $P_m(x) = Q_n(x) \cdot S(x) + R(x)$
  b) $R(x)$ je nulový polynóm alebo stupeň polynómu $Q_n(x)$ je väčší ako stupeň polynómu $R(x)$.

Polynóm $R(x)$ nazývame **zvyškom po delení** polynómu $P_m(x)$ polynómom $Q_n(x)$.

Príklad 10 Utvorme podiel polynómov $(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2)$.

Riešenie:

Ukážeme si ako postupujeme pri riešení jednoduchšej úlohy. Majme za úlohu vypočítať 135:2. Postupujeme takto

$$
\begin{array}{l}
135 : 2 = 67 \\
\underline{\pm 12} \\
\quad 15 \\
\ \underline{\pm 14} \\
\quad 1 = R
\end{array}
$$

Potom platí $\dfrac{135}{2} = 67 + \dfrac{1}{2}$.

Podobne postupujeme pri delení daných polynómov:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \mp 3x^2 \pm 2x} \\
\quad 0 + x^2 \quad - x - 1 \\
\quad\ \underline{\pm x^2 \ \mp 3x \pm 2} \\
\qquad\qquad 2x - 3 = R(x)
\end{array}
$$

Teda

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

V praxi sa stretávame s úlohou vypočítať hodnoty polynómu $P_n(x)$ v nejakom čísle. Môžeme zvoliť nasledovný postup:

Polynóm $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ zapíšeme v tvare

$P_n(x) = \left(a_0 + x \cdot \left(a_1 + x\left(a_2 + \ldots + x \cdot \left(a_{n-1} + x \cdot a_n\right)\right)\right)\ldots\right)$,

odtiaľ dostaneme tzv. Hornerovu schému na výpočet hodnôt daného polynómu pre $x = \alpha$ v tvare:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots & & a_1 & a_0 \\
\alpha & & \alpha \cdot b_n & \alpha \cdot b_{n-1} \ldots & & \alpha \cdot b_2 & \alpha \cdot b_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \ldots & & b_1 & b_0 = P_n(\alpha)
\end{array}
$$

pričom

$b_n = a_n, b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_n, b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha \cdot b_{n-1}, \ldots, b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_2, b_0 = a_0 + \alpha \cdot b_1 = P_n(\alpha)$.

Príklad 11 Pomocou Hornerovej schémy vypočítajme hodnotu polynómu $P_4(x) = -x^4 + 2x^2 - 7x + 4$ pre hodnotu $x = 2$.

Riešenie:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -1 & 0 & 2 & -7 & 4 \\
\underline{2} & & 2\cdot(-1) & 2\cdot(-2) & 2\cdot(-2) & 2\cdot(-11) \\
\hline
 & -1 & -2 & -2 & -11 & -18 \; = P_n(2)
\end{array}$$

Algebrické rovnice

Rovnicu

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Nazývame **algebrickou rovnicou.** Ak $a_n \neq 0$, tak je to algebrická rovnica n - tého stupňa.
Každé komplexné číslo α ($\alpha \in C$), pre ktoré platí, $P_n(\alpha) = 0$ nazývame **koreňom** (riešením) danej rovnice $P_n(x) = 0$.
Vlastnosti:

- **V1:** Každá algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má v množine C aspoň jeden koreň.
- **V2:** Číslo $\alpha \in C$ je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$ práve vtedy, ak polynóm $x - \alpha$ delí polynóm $P_n(x)$ bezo zvyšku.
- **V3:** Algebrická rovnica n - tého stupňa má práve n koreňov.
- **V4:** Ak algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má v množine C rovnaké korene $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r$ ($r \leq n$), tak číslo α_1 je *r*- násobným koreňom rovnice $P_n(x) = 0$
- **V5:** Ak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sú korene rovnice $P_n(x) = 0$, tak
  $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$
- **V6:** Ak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ($1 \leq p \leq n$) sú všetky navzájom rôzne (komplexné) korene rovnice $P_n(x) = 0$ s násobnosťami $k_1, k_2, \ldots, k_p$, tak platí
  $$k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n,$$
  $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_p)^{k_p}.$$
- **V7:** Platí $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$.
- **V8:** Nech $n \geq 1$, koeficienty sú celé čísla, $a_n \neq 0$. Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ (*p* a *q* sú nesúdeliteľné) je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$. Potom koeficient a_n je deliteľný číslom *q* a koeficient a_0 je deliteľný číslom *p*.
- **V9:** Nech $n \geq 2$, koeficienty rovnice $P_n(x) = 0$ sú reálne čísla. Ak $\alpha = p + i \cdot q$ (*p, q* sú reálne čísla) je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$, tak jej koreňom je aj komplexne združené číslo $\overline{\alpha} = p - i \cdot q$.
- **V10:** Ak je algebrická rovnica s reálnymi koeficientmi nepárneho stupňa, tak má aspoň jeden reálny koreň.

Príklad 12 Určme všetky racionálne korene rovnice $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Riešenie: V našej rovnici je $a_n = 1$, $a_0 = -6$, a ak má rovnica celočíselné korene, tak celočíselné korene danej rovnice budú delitele čísla -6, t.j. niektoré z čísel: 1;-1;2;-2;3;-3;6;-6 (vlastnosť **V8**). Postupným výpočtom hodnôt polynómu $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ dostávame $P_3(1) = P_3(2) = P_3(3) = 0$. Pretože rovnica je tretieho stupňa, tak sme našli všetky jej korene, t.j. $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$ (vlastnosť **V3**).
Platí: $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 1 \cdot (x-1)(x-2)(x-3)$ (vlastnosť **V5**).

Príklad 13 Určme všetky korene rovnice $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$.

Riešenie: V našej rovnici je $a_n = 1$, $a_0 = -4$. Ak má daná rovnica celočíselné korene, tak celočíselné korene danej rovnice budú delitele čísla -4 (vlastnosť **V8**), t.j. niektoré z čísel: 1;-1;2;-2;4;-4. Postupným výpočtom hodnôt polynómu $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ dostávame $P_3(-2) = 0$.Teda rovnica má celočíselný koreň $\alpha_1 = -2$. Predelením polynómu $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ polynómom $x + 2$ dostávame $(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) : (x+2) = x^2 + 2$. Riešením rovnice $x^2 + 2 = 0$ dostávame $\alpha_2 = i \cdot \sqrt{2}, \alpha_3 = -i \cdot \sqrt{2}$.
Platí: $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2+2) = (x+2)(x - i\cdot\sqrt{2})(x + i \cdot \sqrt{2})$

Príklad 14 Určme všetky korene rovnice $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$ ak vieme, že číslo $1 + 2i$ je koreňom danej rovnice.

Riešenie: Vzhľadom na vlastnosť **V9** je koreňom danej rovnice aj komplexne združené číslo $1 - 2i$. Potom polynóm $x^2 - 2x + 5 = [x - (1+2i)][x - (1-2i)]$ delí polynóm $P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ bezo zvyšku. Dostávame
$(x^3 - 5x^2 + 11x - 15) : (x^2 - 2x + 5) = x - 3$.
Platí: $P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = (x^2 - 2x + 5)(x-3)$.

Príklad 15 Určme všetky korene rovnice $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.

Riešenie: V našej rovnici je $a_n = 1$, $a_0 = -4$. Ak má daná rovnica celočíselné korene, tak celočíselné korene danej rovnice budú delitele čísla -4 (vlastnosť **V8**), t.j. niektoré z čísel: 1;-1;2;-2;4;-4. Postupným výpočtom hodnôt polynómu $P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ dostávame $P_3(1) = P_3(2) = 0$.Teda rovnica má celočíselné korene $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$. Predelením polynómu $P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, polynómom $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ dostávame $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x^2 - 3x + 2) = x - 2$, teda $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x^2 - 3x + 2)(x - 2)$. Riešením rovnice $x - 2 = 0$ dostávame $\alpha_3 = 2$.
Platí: $P_3(x) = (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x-1)(x-2)(x-2) = (x-1)(x-2)^2$.

Rozklad racionálnej funkcie na parciálne zlomky

Všeobecný tvar racionálnej funkcie je

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

a_i, b_i sú reálne čísla, *m,n* celé ≥0, $b_0 \neq 0$.

Ak stupeň polynómu C $P_n(x)$ je menší ako stupeň polynómu $Q_m(x)$ (*n*<*m*), tak funkcia *R* je **rýdzoracionálna funkcia.**

Pri integrovaní racionálnych funkcií je potrebné vyjadriť racionálnu funkciu pomocou súčtu jednoduchších funkcií, pokiaľ je to možné s najjednoduchšími menovateľmi (rozklad na parciálne zlomky). Takýmito jednoduchšími funkciami sú funkcie:
Polynóm a racionálne funkcie tvaru $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{M \cdot x + N}{(x^2 + p \cdot x + q)^k}$ kde A, α, k, M, N, p, q sú reálne konštanty.

Na výpočet koeficientov používame v podstate dve metódy: dosadzovaciu a porovnávaciu.

Príklad 16 Rozložme funkciu $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ na parciálne zlomky.
Riešenie: Ak stupeň polynómu v čitateli je väčší alebo rovný stupňu polynómu v menovateli, predelíme polynóm v čitateli polynómom v menovateli. Dostávame

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{-x + 10}{x^2 - 4}.$$

Rýdzoracionálnu funkciu $\frac{-x+10}{x^2-4}$ rozložíme na jednoduchšie funkcie. Vypočítame nulové body polynómu v menovateli. Rovnica $x^2 - 4 = 0$ má reálne korene $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$.

$$\frac{-x+10}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{-x+10}{x^2-4} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{x^2-4}$$

$$-x + 10 = A(x+2) + B(x-2)$$

a) **Dosadzovacia metóda** (obyčajne dosadzujeme nulové body polynómu v menovateli)**:**

$$x = 2: \quad -2 + 10 = A(2+2) + B(2-2)$$

$$8 = 4A \Rightarrow A = 2$$

$$x = -2: \quad 2 + 10 = A(-2+2) + B(-2-2)$$

$$12 = -4B \Rightarrow B = -3$$

b) **Porovnávacia metóda:**

$$-1 \cdot x^1 + 10 \cdot x^0 = (A+B)x^1 + (2A - 2B)x^0$$

$$x^1: \quad -1 = A + B$$

$$x^0: \quad 10 = 2A - 2B$$

Riešením dostávame $A = 2, B = -3$.

Teda rýdzoracionálnu funkciu $\frac{-x+10}{x^2-4}$ môžeme rozložiť na parciálne zlomky takto:

$$\frac{-x+10}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{x+2}.$$

A nakoniec dostávame

$$\frac{x^3+x^2-5x+6}{x^2-4} = x+1+\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}.$$

Príklad 17 Rozložme funkciu $\frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4}$ na parciálne zlomky.

Riešenie:

Riešením rovnice $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=0$ dostávame $\alpha_1=\alpha_2=1, \alpha_3=2i, \alpha_4=-2i$.

Rozklad hľadáme v tvare (je to rýdzoracionálna funkcia)

$$\frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}$$

$$\frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4} = \frac{A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

Teda

$$-3x^3+12x^2-6x+7 = A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Mx+N)(x-1)^2$$

Dosadzovaciou metódou dostávame:

$x=1: \quad 10=5B \Rightarrow B=2$

Ďalej môžeme dosadiť ľubovoľné čísla, napríklad

$x=0: \quad 7=-4A+4B+N$

$x=-1: \quad 28=-10A+5B-4M+4N$

$x=2: \quad 19=8A+8B+2M+N$

Riešením dostávame $A=1, B=2, M=-4, N=3$.

Môžeme použiť tiež porovnávaciu metódu (potrebujeme tri rovnice, pretože B už poznáme):

$-3x^3+12x^2-6x+7x^0 = A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Mx+N)(x-1)^2$

$x^3: \quad -3=A+M$

$x^2: \quad 12=-A+B-2M+N$

$x^1: \quad -6=4A+M-2N$

$x^0: \quad 7=-4A+4B+N$

Riešením dostávame $A=1, B=2, M=-4, N=3$. Teda rozklad danej funkcie na parciálne zlomky je:

$$\frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-4x+3}{x^2+4}.$$

Poznámka. Ďalšie príklady nájdeme napríklad na http://web.tuke.sk/fei-km/LA/ULAzbierka.pdf