

Otázky sa skúšku z predmetu Optimalizačné metódy (skúšajúci J. Buša st., LS 2010/2011)

Z každej z piatich častí bude vybraná jedna teoretická otázka za cca. 10 bodov. V zátvorkách sú čísla strán zo skript.

Matematické základy OM

1. Vysvetlite podmienky násobenia matic (určte súčin zadaných matic). Čo je to skalárny súčin vektorov? (11)
2. Definujte vlastné čísla a vlastné vektory matic. Napíšte rozklad symetrickej matice A a inverznej matice A^{-1} (12).
3. Definujte systém A -zdrúžených vektorov. Sformulujte a dokážte Vetu 2.1, sformulujte Vetu 2.2 (12–13).
4. Definujte lineárny funkcionál (14). Určte gradient a Hesseho maticu lineárneho funkcionálu.
5. Definujte kvadratickú funkciu n premenných. Určte gradient a Hesseho maticu kvadratickej funkcie. Sformulujte definície kladnej (semi)definitnosti a uveďte Vetu 2.6 (Sylvestrovo kritérium) (14–15).
6. Definujte metrický priestor, uveďte aspoň dva príklady metrického priestoru. Definujte hromadný, vnútorný a hraničný bod množiny, otvorenú a uzavretú množinu (15–16).
7. Definujte okolie a prstencové okolie bodu v metrickom priestore. Definujte lokálne minimum a ostré lokálne minimum funkcie n premenných (16).
8. Definujte konvexnú a rýdzokonvexnú množinu. Vysvetlite pojmy: lineárna kombinácia, konvexná kombinácia a kužeľová kombinácia vektorov, konvexný obal množiny. Uveďte a dokážte vetu o konvexnosti prieniku konvexných množín (17–20).
9. Definujte konvexnú, rýdzokonvexnú a silnokonvexnú funkciu. Sformulujte vety o globálnom minime konvexnej funkcie a o existencii a jednoznačnosti minima silnokonvexnej funkcie (20–22).
10. Definujte diferenciál m -tého rádu funkcie n premenných. Sformulujte Taylorovu vetu pre funkciu n premenných (24–25).
11. Definujte prvý diferenciál funkcie n premenných, gradient a deriváciu funkcie $f(\mathbf{x})$ v smere \mathbf{s} v bode \mathbf{x} . Vysvetlite geometrický význam gradientu – Vety 2.19 – 2.21 (26–27).
12. Definujte druhý diferenciál funkcie n premenných a Hesseho maticu (pre zadanú funkciu).
14. Riešenie neriešiteľných sústav na základe minimalizácie funkcie $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$. Napíšte gradient a Hesseho maticu funkcie $f(\mathbf{x})$.

Nutné a postačujúce podmienky minima

15. Uveďte a zdôvodnite nutné a postačujúce podmienky C1–D2 minima pre úlohu UCP (30–31).
16. Sformulujte úlohu LEP. Uveďte nutné a postačujúce podmienky minima pre úlohu LEP (31–33). Vysvetlite postup určenia jednotlivých matic v podmienkach E1–F3.
17. Sformulujte úlohu LIP. Uveďte nutné a postačujúce podmienky minima pre úlohu LIP (33–35). Vysvetlite postup určenia jednotlivých matic v podmienkach G1–I4.
18. Vysvetlite na zadanom príklade použitie metódy Lagrangeových multiplikátorov (39–46). Vysvetlite, ako určíme druhý diferenciál Lagrangeovej funkcie na väzbe.

Jednorozmerná optimalizácia

V každej otázke 18–24 najprv definujte unimodálnu funkciu

19. Vysvetlite princíp dichotómie (47–50) na zužovanie intervalu obsahujúceho bod minima.
20. Vysvetlite princíp minimalizačnej metódy využívajúcej Fibonacciho postupnosť (47, 50–52) a uveďte odhad chyby.
21. Odvoďte vzorce zlatého rezu (47, 52–53) a uveďte odhad chyby.
22. Vysvetlite využitie kvadratickej interpolácie (47, 53–55) pri minimalizácii unimodálnej funkcie.
23. Vysvetlite využitie kubickéj interpolácie (47, 55–56) pri minimalizácii unimodálnej funkcie.
24. Opíšte metóda bisekcie s využitím derivácií funkcie na minimalizáciu unimodálnej funkcie (47, 56–57).
25. Opíšte Newtonovu-Raphsonovu metódu minimalizácie unimodálnej funkcie (47, 57–58).

Viacrozmerná optimalizácia bez ohraničení

V každej otázke 25–32 najprv sformulujte minimalizačnú úlohu bez ohraničení

26. Opíšte použitie relaxačných metód.
27. Opíšte postup Hookeho-Jeevesovej metódy (73–76).
28. Opíšte metódu simplexov, podrobne rozoberte postup Nelderovej-Meadovej metódy (77–86).
29. Vysvetlite použitie gradientnej metódy. Porovnajme metódu zmenšovania kroku a metódu najrýchlejšieho spádu (60–61).
30. Opíšte metódu zdrúžených gradientov pre kvadratickú funkciu (65–67), vrátane vzorcov pre parameter γ^k .
31. Napíšte vývojový diagram metódy zdrúžených gradientov pre všeobecnú funkciu (67–68).
32. Opíšte postup minimalizácie pomocou Newtonovej-Raphsonovej metódy (59–60).
33. Vysvetlite princíp kvázi-newtonovských metód a napíšte všeobecný vývojový diagram kvázi-newtonovskej metódy (69–72).

Viacrozmerná optimalizácia s ohraničeniami

34. Sformulujte úlohu NIP a vysvetlite princíp metódy možných smerov (90–91).
35. Sformulujte úlohu NIP a vysvetlite jej riešenie pomocou bariérových funkcií (90, 92–94).
36. Sformulujte úlohu NIP a vysvetlite jej riešenie pomocou penalizačných funkcií (90, 95–96).
37. Sformulujte úlohu NIP a vysvetlite použitie komplexovej metódy (90, 97–98).
38. Sformulujte úlohu NEP a vysvetlite postup určenia redukovaného gradientu (98–101).
39. Sformulujte úlohu NEP a vysvetlite postup použitia Newtonovej metódy využívajúcej redukovanú Hesseho maticu, vrátane určenia redukovanej Hesseho matice (98, 101–102).
40. Sformulujte úlohu NEP a vysvetlite jej riešenie pomocou penalizačných funkcií (98, 102).