1 Matice

Nech m, n sú prirodzené čísla. Reálnou maticou A typu $m \times n$ budeme nazývať obdĺžnikovú schému mn prvkov zapísaných do m riadkov a n stĺpcov v tvare

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sú prvky matice, $i = 1, 2, \ldots, m$, a $j = 1, 2, \ldots, n$. Používame tiež skrátený zápis $\mathbb{A} = (a_{ij})$, resp. $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, resp. $\mathbb{A}_{m \times n}$.

Je zrejmé, že index ij určuje pozíciu prvku v schéme. Prvý index i udáva poradie riadku, druhý index j udáva poradie stĺpca. Napr. prvok a_{23} je umiestnený v druhom riadku a treťom stĺpci.

Skupina prvkov $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ sa nazýva **i-ty riadok matice.** Sú to prvky, ktoré majú rovnaký prvý index, t.j. sú zapísané v i-tom riadku schémy.

Skupina prvkov $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ sa nazýva **j-ty stĺpec matice**. Sú to prvky, ktoré majú rovnaký druhý index, t.j. sú zapísané v j-tom stĺpci schémy.

Každý riadok, resp. stĺpec matice možno považovať za **vektor** (riadkový, stĺpcový).

Pozn. Pri práci s vektormi je dobré poznať tzv. **skalárny súčin (*dot product*)**, ktorý pre dvojicu n-rozmerných vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ počítame nasledovným spôsobom:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Potom platí

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||\mathbf{x}||^2$$

kde $||\mathbf{x}||$ označuje **dĺžku** alebo **normu** vektora $\mathbf{x}$.

1.1 Vlastnosti matíc

- Matice sú **rovnakého typu**, ak ide o matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov.
- Maticu s jedným riadkom nazývame **riadkový vektor** alebo **riadková matica typu** $1 \times n$.
- Maticu s jedným stĺpcom nazývame **stĺpcový vektor** alebo **stĺpcová matica typu** $m \times 1$.
- Maticu typu $m \times n$ nazývame **obdĺžniková matica**, ak $m \neq n$ (počet riadkov je rôzny od počtu stĺpcov).
- Ak je matica typu $n \times n$, teda počet riadkov matice je rovný počtu jej stĺpcov, hovoríme o **štvorcovej matici stupňa** n.
- Prvky štvorcovej matice, ktorých riadkový aj stĺpcový index je rovnaký (teda ležia na jednej z uhlopriečok tejto matice), nazývame **diagonálne prvky**.
  - Vektor $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ nazývame **hlavná diagonála matice**.
  - Vektor $(a_{n1}, \dots, a_{1n})$ nazývame **vedľajšia diagonála matice**.
- Nech $\mathbb{A}$ je štvorcová matica stupňa n. **Stopu** tejto matice definujeme ako

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

  Stopou matice je teda súčet prvkov na hlavnej diagonále.
- **Diagonálna matica** je štvorcová matica, ktorej všetky prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule.
- **Nulová** matica má všetky prvky rovné nule.
- **Jednotková matica** je diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sa rovnajú číslu 1.
- **Transponovanou maticou** k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ nazývame maticu $\mathbb{A}^T = (\tilde{a}_{ji})_{n\times m}$, pre ktorej prvky platí

$$\tilde{a}_{ji} = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

  Transponovaná matica $\mathbb{A}^T$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ výmenou riadkov za stĺpce (teda riadky matice $\mathbb{A}$ sú stĺpce matice $\mathbb{A}^T$ a stĺpce matice $\mathbb{A}^T$ sú riadky matice $\mathbb{A}$).

  Diagonálna matica je rovná svojej transponovanej matici.
- **Symetrická matica** je štvorcová matica (stupňa n), pre ktorej prvky platí

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

  Symetrická matica je teda symetrická podľa hlavnej diagonály.
- **Anti-symetrická matica** je štvorcová matica (stupňa n), pre ktorej prvky platí

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- **Horná trojuholníková matica** je štvorcová matica s nulami pod hlavnou diagonálou.
- **Dolná trojuholníková matica** je štvorcová matica s nulami nad hlavnou diagonálou.

1.2 Operácie s maticami

K základným operáciám s maticami patrí vynásobenie matice konštantou, súčet (rozdiel) matíc a súčin matíc.

Rovnosť matíc

Matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})$ považujeme za rovnajúce sa, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, vtedy a len vtedy, keď sú rovnakého typu $m \times n$ a platí

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Súčet dvoch matíc

Nech matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})$ sú rovnakého typu $m \times n$. Maticu $\mathbb{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorej prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

nazývame súčtom matíc $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ a píšeme $\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$.

Súčet matíc nie je definovaný pre matice rôzneho typu!

Rozdiel dvoch matíc

Nech matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})$ sú rovnakého typu $m \times n$. Maticu $\mathbb{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorej prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

nazývame rozdielom matíc $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ a píšeme $\mathbb{C} = \mathbb{A} - \mathbb{B}$.

Rozdiel matíc nie je definovaný pre matice rôzneho typu!

Vynásobenie matice konštantou

Nech $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matica typu $m \times n$ a k je reálna konštanta. Maticu $\mathbb{B} = (b_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorej prvky platí

$$b_{ij} = k a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

nazývame súčinom konštanty k a matice $\mathbb{A}$. Píšeme $\mathbb{B} = k\mathbb{A}$.

Súčin dvoch matíc

Nech $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matica typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})$ je matica typu $n \times p$. Maticu $\mathbb{C} = (c_{ij})$ typu $m \times p$, pre ktorej prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

nazývame súčinom matíc $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ (v uvedenom poradí). Všimnime si, že prvok c_{ij} získavame ako skalárny súčin i-teho riadku matice $\mathbb{A}$ a j-teho stĺpca matice $\mathbb{B}$. Píšeme $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

Súčin dvoch matíc nie je definovaný pre také dve matice, ktorých počet stĺpcov prvej matice sa nerovná počtu riadkov druhej matice.