Rovnice a nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote

Bežný postup riešenia úloh s neznámou v absolútnej hodnote spočíva „v odstránení absolútnych hodnôt". Často je k tomu potrebné nájsť také intervaly maximálnej veľkosti, že na každom z nich je každý výraz, vyskytujúci sa v absolútnej hodnote, len kladný alebo len záporný (k tomu zvyčajne je potrebné nájsť body, v ktorých tieto výrazy „menia znamienko" – dohodneme sa na tom, že tieto body nazveme **kritickými**). Potom k odstráneniu absolútnej hodnoty stačí použiť jej definíciu.

Pri riešení konkrétnych úloh môžeme použiť napr. „tabuľkovú metódu" (známu zo strednej školy) alebo modifikáciu „intervalovej metódy". Informácia o znamienkach jednotlivých výrazov na ľubovoľnom intervale nám umožní prepísať riešenú úlohu na tvar, v ktorom už absolútne hodnoty nevystupujú. Takto prepíšeme úlohu na každom intervale, vyriešime ju na ňom a riešenie pôvodnej úlohy je zjednotením získaných riešení na jednotlivých intervaloch.

V špeciálnych prípadoch môžeme využiť **geometrický význam absolútnej hodnoty**: nech $a \in \mathbb{R}$ je pevné číslo, potom $|x - a|$ geometricky vyjadruje vzdialenosť bodu x od bodu a na číselnej osi. Takto napr. riešením nerovnice $|x + 3| < 5$ v $\mathbb{R}$ je množina tých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu $a = -3$ je menšia ako 5. Presvedčte sa nákresom na číselnej osi, že riešením úlohy je interval $(-8; 2)$. Túto geometrickú interpretáciu absolútnej hodnoty je výhodné „mechanicky" ovládať pri práci s limitami a príbuznými problémami.

Príklad 1 *Upravme výraz* $V(x) = \sqrt{(x+2)^2} - |6 - x|$ *tak, aby neobsahoval odmocninu a ani absolútnu hodnotu.*

Riešenie. Druhú odmocninu odstránime na základe $\sqrt[2n]{\heartsuit^{2n}} = |\heartsuit|$. kde $n = 1$. Dostaneme

$$V(x) = |x + 2| - |6 - x|. \tag{1}$$

Je zrejmé, že výraz $|x + 2|$ má jediný kritický bod, a to číslo -2 (výraz $(x + 2)$ v ňom „mení znamienko"). Pre $|6 - x|$ je kritické číslo 6. Body -2 a 6 rozdeľujú množinu reálnych čísel na tri intervaly $(\infty; -2)$, $(-2; 6)$ a $(6; \infty)$. Na každom z týchto intervalov je výraz $(x + 2)$ kladný alebo záporný. To isté platí aj pre $(6-x)$. V krajných bodoch týchto intervalov môžu byť tieto výrazy rovné nule – to nám neprekáža, lebo $|0| = 0$. Na základe definície absolútnej hodnoty sa dopracujeme k bežne používanej tabuľke:

	$\lvert x+2\rvert$	$\lvert 6-x\rvert$
$(\infty; -2\rangle$	$-x-2$	$6-x$
$\langle -2; 6\rangle$	$x+2$	$6-x$
$\langle 6; \infty)$	$x+2$	$x-6$

V tejto tabuľke je podchytené správanie sa výrazov $|x+2|$ a $|6-x|$ na jednotlivých intervaloch: napr. na intervale $\langle -2; 6\rangle$ (pozri riadok) je výraz $|6 - x|$ (pozri stĺpec) rovný výrazu $6 - x$.

Teraz môžeme na jednotlivých intervaloch pomocou tejto tabuľky upraviť výraz (1):

- ak $x \in (\infty; -2\rangle$, tak $V(x) = (-x - 2) - (6 - x) = -8$;
- ak $x \in \langle -2; 6\rangle$, tak $V(x) = (x + 2) - (6 - x) = 2(x - 2)$;
- a ak $x \in \langle 6; \infty)$, tak $V(x) = (x + 2) - (x - 6) = 8$.

A tu je prehľadné zhrnutie našich výpočtov:

$$V(x) = \begin{cases} -8 & \text{pre } x \in (-\infty; -2\rangle\,; \\ 2(x-2) & \text{pre } x \in \langle -2; 6\rangle\,; \\ 8 & \text{pre } x \in \langle 6; +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

$\square$

Príklad 2 *Vyriešme v* $\mathbb{R}$*: a)* $|x-1| = 2x+3$*; b)* $|1-x| + x < 2$*; c)* $|4-x^2| < |x+4| - 2$*; d)* $|3-4x| \geqq 1$.

Riešenie.

a) Pre výraz $|x-1|$ je jediným kritickým bodom číslo 1, lebo len v bode $x = 1$ výraz $(x-1)$ „mení znamienko“. Množinu $\mathbb{R}$ vyjadríme ako zjednotenie dvoch intervalov, na ktoré ju číslo 1 „rozdeľuje“: $\mathbb{R} = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 1; \infty)$. Na každom z týchto intervalov odstránime absolútnu hodnotu a po tejto úprave vyriešime vzniknutú rovnicu.

1. Pre $x \in (-\infty; 1\rangle$ je $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ a daná rovnica má tvar
$$-x+1 = 2x+3$$
odkiaľ $x = -2/3$. Pretože $-2/3 \in (-\infty; 1\rangle$, tak $\mathcal{K}_1 = \{-2/3\}$.
2. Pre $x \in \langle 1; \infty)$ je $|x-1| = x-1$ a daná rovnica má tvar
$$x-1 = 2x+3$$
odkiaľ $x = -4$. Pretože $-4 \notin \langle 1; \infty)$, tak $\mathcal{K}_2 = \emptyset$.

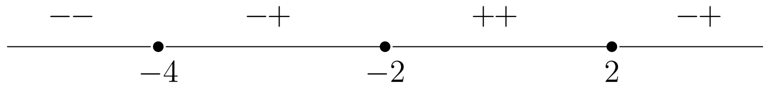
Riešením danej rovnice je množina $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{-2/3\}$.

b) Aj pre výraz $|1-x|$ je jediným kritickým bodom číslo 1. Ďalej postupujeme tak ako v časti a) tohto príkladu, len s tým rozdielom, že na každom z intervalov $(-\infty; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$ budeme po odstránení absolútnej hodnoty riešiť nerovnicu a nie rovnicu.

1. Pre $x \in (-\infty; 1\rangle$ je $|1-x| = 1-x$ a daná nerovnica má tvar
$$(1-x) + x < 2 \qquad \text{t. j.} \qquad 1 < 2.$$
Jej riešením je celá množina reálnych čísel $\mathbb{R}$, a preto riešením danej nerovnice na intervale $(-\infty; 1\rangle$ je množina
$$\mathcal{K}_1 = (-\infty; 1\rangle \cap \mathbb{R} = (-\infty; 1\rangle.$$
2. Pre $x \in \langle 1; \infty)$ je $|1-x| = -(1-x) = x-1$ a daná nerovnica má tvar
$$x - 1 + x < 2 \qquad \text{t. j.} \qquad x < \frac{3}{2},$$
čo dáva interval $(-\infty; 3/2)$. Teda
$$\mathcal{K}_2 = \langle 1; \infty) \cap (-\infty; 3/2) = \langle 1; 3/2).$$

Záver: riešením danej nerovnice je množina
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = (-\infty; 3/2)$$

c) Ľahko zistíme, že výraz $V_1(x) = 4 - x^2$ je kladný na intervale $(-2; 2)$ a záporný na množine $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; výraz $V_2(x) = x + 4$ je kladný na $(-4; \infty)$ a záporný na $(-\infty; -4)$. V každom z bodov ± 2 a -4 jeden z týchto výrazov mení znamienko. Na obrázku je situácia znázornená tým, že na jednotlivých intervaloch je vľavo uvedené znamienko, ktoré na ňom nadobúda výraz V_1 a vpravo znamienko pre výraz V_2.



Všimnime si, že na intervaloch $\langle -4; -2\rangle$ a $\langle 2; \infty)$ sú rovnaké označenia $-+$, a preto daná nerovnica má na nich po odstránení absolútnych hodnôt rovnaký tvar. Teraz môžeme na jednotlivých množinách použiť intervalovú metódu riešenia nerovnice – odlišnosť bude len v tom, že nebudeme znázorňovať celú číselnú os,[1] ale množinu, na ktorej budeme riešiť upravenú nerovnicu.

1. Ak $x \in \langle -4; -2) \cup \langle 2; \infty) = A$ má daná nerovnica tvar $x^2 - 4 < x + 4 - 2$, t. j. $x^2 - x - 6 < 0$. Koreňmi polynómu $P(x) = x^2 - x - 6$ sú čísla 3 a -2. Vyznačíme ich v množine A „prázdnymi krúžkami“ (ostrá nerovnosť):

   a zistíme znamienka polynómu P na získaných intervaloch množiny A. Keďže riešime na množine A nerovnicu $x^2 - x - 6 < 0$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme na obrázku označili znakom mínus. Teda riešením danej nerovnice na množine A je $\mathcal{K}_1 = \langle 2; 3)$.
2. Ak $x \in (-\infty; -4) = B$, tak nerovnica má tvar $x^2 - 4 < -x - 4 - 2$. Presvedčte sa, že jej riešením na množine B je $\mathcal{K}_2 = \emptyset$.
3. Ak $x \in (-2; 2) = C$, tak daná nerovnica má tvar $4 - x^2 < x + 4 - 2$. Overte, že jej riešením na množine C je $\mathcal{K}_3 = (1; 2)$.

   Riešením danej nerovnice je $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 = (1; 3)$.

d) Keďže výraz $|3 - 4x|$ sa dá upraviť na tvar, ktorý je číselným násobkom výrazu typu $|x - a|$, tak tu môžeme použiť geometrický význam absolútnej hodnoty. Na základe vety **??** a definície absolútnej hodnoty dostaneme

$$|3 - 4x| = |-4| \cdot \left|x - \frac{3}{4}\right| = 4\left|x - \frac{3}{4}\right|,$$

t. j. danú nerovnicu môžeme ekvivalentne zapísať ako $|x - 3/4| \geqq 1/4$. Jej riešením je množina všetkých tých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu 3/4 nie je menšia ako 1/4. Overte, že $\mathcal{K} = (-\infty; 1/2\rangle \cup \langle 1; \infty)$. □

Úlohy

[1]Pozri kroky intervalovej metódy v 4.cvičení.

V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnice, resp. nerovnice:

1. $|3x-1| = |3x-2|$; $[\mathcal{K} = \left\{1/2\right\}]$
2. $|7-2x| = |5-3x| + |x+2|$; $[\mathcal{K} = \langle -2; 5/3\rangle]$
3. $|1-|1-x|| = 1$; $[\mathcal{K} = \{\pm 1;\ 3\}]$
4. $|x| + |x-5| < 7$; $[\mathcal{K} = (-1; 6)]$
5. $\left|\dfrac{1}{x-1} + 2\right| < \dfrac{1}{2}$; $[\mathcal{K} = (1/3; 3/5)]$
6. $|7-2x| \leqq |5-3x| + |x+2|$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R}]$
7. $|x^2+2x-3| = 3-2x-x^2$; $[\mathcal{K} = \langle -3; 1\rangle]$
8. $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geqq 3$; $[\mathcal{K} = (3; 10/3\rangle]$
9. $|x^3+1| \geqq x+1$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R} - (0; 1)]$
10. $x^3+1 \geqq |x+1|$; $[\mathcal{K} = \ \langle -1;\ 0\rangle \cup \langle 1;\ \infty)]$
11. $\dfrac{1}{|2x-3|} \geqq 5$; $[\mathcal{K} = \langle 7/5; 3/2) \cup (3/2; 8/5\rangle]$
12. $|x-6| \geqq |x^2-5x+6|$; $[\mathcal{K} = \langle 0;\ 4\rangle]$
13. $|x-6| \geqq |x^2-5x+9|$; $[\mathcal{K} = \langle 1;\ 3\rangle]$
14. $\Big||x|-3\Big| = -2x$; $[\mathcal{K} = \{-1\}]$
15. $2 + \Big||x+1| - |x-1|\Big| \leqq 2x$; $[\mathcal{K} = \langle 2; \infty)]$
16. $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leqq 1$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R}]$
17. $3x - |2x-1| = x+1$; $[\mathcal{K} = \langle 1/2;\ +\infty)]$
18. $|3x-2| + 4 = |2x+3|$; $[\mathcal{K} = \{3/5; 1\}]$
19. $|x+6| - |x+2| + |x-5| - 9 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -8; -4\rangle \cup \langle 0; 10\rangle]$
20. $|x^2+1| \leqq 2x+1$; $[\mathcal{K} = \langle 0; 2\rangle]$
21. $|2x+1| - |2x| + 1 = 2x$; $[\mathcal{K} = \{1\}]$
22. $5|x-1| - 3|x-2| + |x-4| + x - 5 > 0$; $[\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (1{,}5;\ \infty)]$
23. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2} \geqq 2x$; $[\mathcal{K} = (-\infty;\ 2)]$
24. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2} \geqq 2$. $[\mathcal{K} = \langle -1;\ 2) \cup \langle (3+\sqrt{17})/2;\ \infty)]$

Odporúčané zdroje

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika I. Vzorové a neriešené úlohy,* TU v Košiciach (2013) 157 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[2] Buša, J. – Schrötter, Š.: *Stredoškolská matematika pre študentov FEI TU v Košiciach,* TU v Košiciach (2015) 180 s., ISBN 978-80-553-2193-6, `http://people.tuke.sk/jan.busa/SM/Busa_Schrotter_Stredoskolska_matematika_2015.pdf`, [navštívené 20. 6. 2016]

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: *Úvod do predmetu MATEMATIKA 1*, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-Ucebnica-Dzurina-Grincova-Pirc.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[4] Molnárová, M. – Myšková, M.: *Úvod do lineárnej algebry,* (2005) 103 s., ISBN 80-8073-361-9, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-ULA-Ucebnica-Zbierka.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[5] Olšák, P.: *Lineární algebra*, 2. vydanie, Praha (2010) 167 s.

[6] *Matematika I*, elektronický učebný text, `http://it4kt.cnl.tuke.sk/c/mat/student/01.html`, [navštívené 18. 6. 2016]

[7] *Systém počítačovej algebry Maxima*, program wxMaxima sa dá stiahnuť z `http://andrejv.github.io/wxmaxima/`, [navštívené 18. 6. 2016]