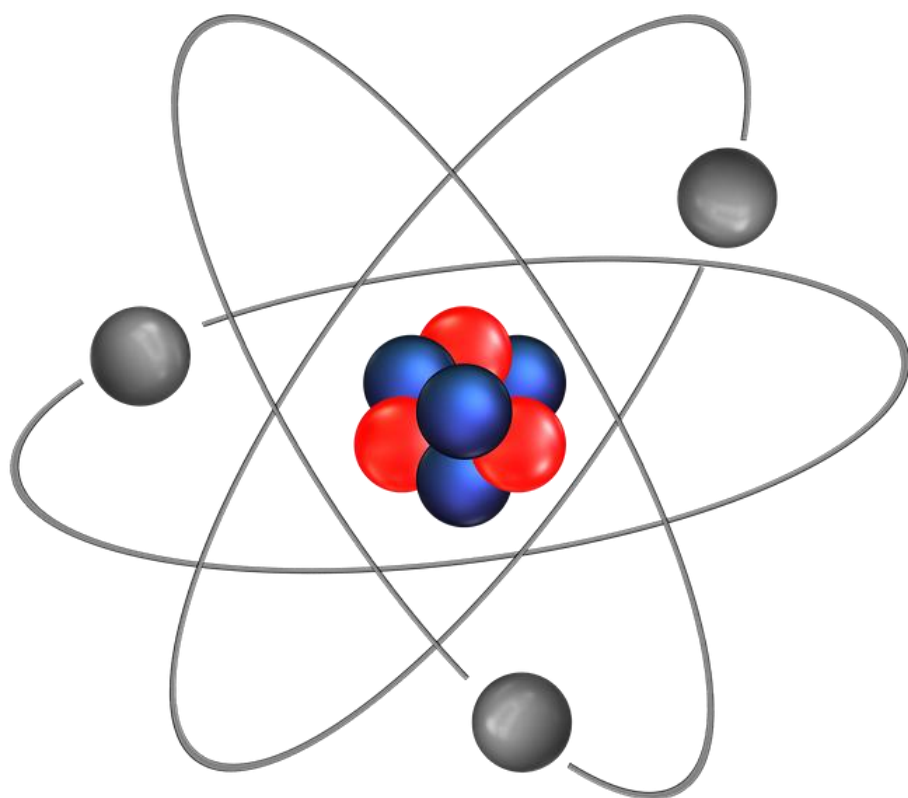


TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH



NÁVODY NA CVIČENIA Z PREDMETU
ZÁKLADY
INŽINIERSTVA
MATERIÁLOV

Peter Lukács
Tibor Rovenský

Košice 2017

Obsah

Úvod	3
Prehľad použitých fyzikálnych veličín, konštánt, skratiek a symbolov	4
1. Atómová štruktúra	6
1.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom	6
1.2 Kvantová teória	7
1.3 Bohrov model atómovej štruktúry	8
1.4 Vlnový charakter elektrónu	9
1.5 Vlnová funkcia, kvantové čísla	11
1.6 Elektrónové orbitály	13
1.7 Kryštálové štruktúry	14
1.8 Riešené príklady	16
1.9 Neriešené príklady	18
2. Vodivé materiály	20
2.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom	20
2.2 Kvantová teória vodivosti kovov	20
2.3 Elektrické vlastnosti kovov	22
2.4 Termoelektrické vlastnosti kovov	25
2.5 Tepelná vodivosť	25
2.6 Supravodivosť	25
2.7 Riešené príklady	26
2.8 Neriešené príklady	30
3. Magnetické materiály	33
3.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom	33
3.2 Magnetizačné charakteristiky	34

3.3	Riešené príklady	36
3.4	Neriešené príklady.....	44
4.	Elektroizolačné materiály	45
4.1	Stručný teoretický prehľad k príkladom	45
4.2	Polarizácia dielektrík.....	45
4.3	Relatívna permitivita	46
4.4	Náboj a jeho plošná hustota.....	47
4.5	Elektrická vodivosť.....	49
4.6	Riešené príklady	49
4.7	Neriešené príklady.....	55
5.	Polovodičové materiály	59
5.1	Stručný teoretický prehľad k príkladom	59
5.2	Fermi Diracova rozdeľovacia funkcia.....	61
5.3	Koncentrácia nosičov náboja.....	62
5.4	Fermiho hladina a výstupná práca	62
5.5	Hallov jav	64
5.6	PN priechod	65
5.7	Difúzia elektrónov a dier	66
5.8	Riešené príklady	67
5.9	Neriešené príklady.....	75
	Zoznam použitej literatúry	78

Úvod

Táto učebná pomôcka je určená ako návod na cvičenia z predmetu Základy inžinierstva materiálov študentom Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Skriptá sú rozdelené do piatich kapitol, pričom každá kapitola sa venuje inému druhu materiálu, počnúc vodivými materiálmi, cez magnetické a izolačné materiály a končiac polovodičovými materiálmi. Okrem uvedených druhov materiálov sa skriptá vo svojej prvej kapitole venujú aj samotným atómovým štruktúram, ktoré poskytujú študentom nutný teoretický základ z hľadiska analýzy materiálov.

Učebná pomôcka obsahuje stručný teoretický základ pre každú z piatich kapitol, ktorý umožní študentom ľahšie pochopiť jednotlivé druhy materiálov, poznať ich základnú charakteristiku a vlastnosti a následne sa venovať výpočtom. Uvedená teória však slúži len ako doplnok k prednáškam a neslúži ako ich náhrada. Skriptá okrem už spomínaného stručného teoretického základu obsahujú aj sériu riešených príkladov, kde si študent môže overiť svoje vedomosti osvojené počas prednášok a zdokonaľiť sa vo výpočtových cvičeniach.

V závere každej kapitoly sa nachádzajú aj neriešené príklady, pričom pri každom príklade sú uvedené aj výsledky. Táto časť skript slúži na podporu samostatnej práce študentov, pričom jednotlivé príklady môžu byť použité ako vzorové v priebehu cvičení, vďaka čomu si študent osvojuje danú problematiku.

Za mnohé cenné rady a pripomienky, poskytnuté materiály a príklady, ktoré boli postupne rokmi zozbierané, ďakujeme celému kolektívu Katedry technológií v elektronike Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Špeciálne poďakovanie patrí prof. Ing. Alene Pietrikovej, CSc., Ing. Igorovi Vehecovi, PhD., Ing. Slavomírovi Kardošovi, PhD., Ing. Pavlovi Cabúkovi, PhD. a Ing. Ondrejovi Kováčovi, PhD.

autori

Prehľad použitých fyzikálnych veličín, konštánt, skratiek a symbolov

značka	jednotka	názov
A		nukleónové číslo
a	$[m \cdot s^{-2}]$	zrýchlenie elektrónu
E	$[V \cdot m^{-1}]$	elektrická intenzita
f	$[Hz]$	frekvencia žiarenia
F	$[N]$	sila
f_0	$[Hz]$	charakteristická frekvencia
f_{FD}		Fermi-Diracova rozdeľovacie funkcia
H_K	$[A \cdot m^{-1}]$	kritická intenzita magnetického poľa
I	$[A]$	elektrický prúd
J	$[A \cdot m^{-2}]$	hustota prúdu
l		vedľajšie kvantové číslo
l	$[m]$	dĺžka vodiča
m	$[kg]$	hmotnosť častice
m		magnetické kvantové číslo
n		hlavné kvantové číslo
n	$[m^{-3}]$	koncentrácia voľných nosičov náboja
N		neutrónové číslo
r	$[m]$	polomer (vzdialenosť)
R	$[\Omega]$	elektrický odpor
s		spinové kvantové číslo
S	$[m^2]$	prierez vodiča
T	$[K]$	teplota
T_K	$[K]$	kritická teplota
u	$[m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}]$	pohyblivosť nosičov náboja
U_K	$[V]$	potenciálový rozdiel
v	$[m \cdot s^{-1}]$	stredná okamžitá rýchlosť elektrónu
W	$[J], [eV]$	energia
W_F	$[J], [eV]$	energia Fermiho hladiny
W_k	$[J], [eV]$	kinetická energia
W_p	$[J], [eV]$	potenciálna energia
Z		protónové (atómové) číslo

α	[K ⁻¹]	teplotný súčiniteľ odporu
γ	[S.m ⁻¹]	konduktivita (v staršej literatúre: merná elektrická vodivosť)
λ	[m]	vlnová dĺžka žiarenia
λ_T	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]	merná tepelná vodivosť
ρ	[Ω .m]	rezistivita (v staršej literatúre: merný elektrický odpor)
τ	[s]	relaxačná doba
ψ		vlnová funkcia de Broglieho vlny
\hbar	[Js]	redukovaná Planckova konštanta

Konštanty

$c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg	$\rho_{Ag} = 1,54 \cdot 10^{-8}$ Ω m	$n_{Cu} = 8,427 \cdot 10^{28}$ m ⁻³
$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C	$M_{Al} = 2700$ kg/m ³	$\rho_{Al} = 2,94 \cdot 10^{-8}$ Ω m	$N_I = 2,688 \cdot 10^{25}$ m ⁻³
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K	$M_{Cu} = 8890$ kg/m ³	$\rho_{Cu} = 1,724 \cdot 10^{-8}$ Ω m	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js	$\Delta W_{z\ Si} = 1,21$ eV	$\rho_{Ge} = 0,47$ Ω m	$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ H/m
$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg	$\Delta W_{z\ Ge} = 0,75$ eV	$n_{Ag} = 5,8 \cdot 10^{28}$ m ⁻³	$\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24}$ H/m

1. Atómová štruktúra

1.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom

Atóm je sústava elementárnych častíc umiestnených v jadre a atómovom obale. Usporiadanie elementárnych častíc určuje chemicko-fyzikálne vlastnosti príslušného chemického prvku.

Jadro atómu je kladne nabité a tvorí prevažnú časť hmoty. Základnými stavebnými časticami jadra sú elektricky neutrálne *neutróny* a kladne nabité *protóny*.

Obal atómu tvorí prevažnú časť objemu atómu a jeho základnými stavebnými časticami sú záporne nabité *elektróny*.

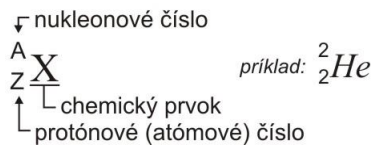
Tab. 1.1 Vlastnosti elementárnych častíc

subatomárna častica	symbol	elektrický náboj	hmotnosť
neutrón	n^0	0 C	$m_n = 1,674927 \cdot 10^{-27}$ kg
protón	p^+	$+ 1,602176 \cdot 10^{-19}$ C	$m_p = 1,672621 \cdot 10^{-27}$ kg
elektrón	e^-	$- 1,602176 \cdot 10^{-19}$ C	$m_e = 9,109382 \cdot 10^{-31}$ kg

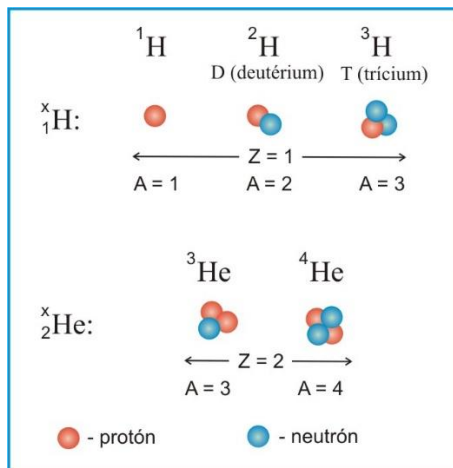
Protónové (atómové) číslo Z udáva počet protónov v jadre.

Neutrónové číslo N udáva počet neutrónov v jadre.

Nukleonové číslo A je súčet protónového a neutrónového čísla.



Obr. 1.1 Označenie prvkov



Obr. 1.2 Izotop vodíka a hélia

Izotopy sú atómy s rovnakým protónovým číslom, teda toho istého chemického prvku, líšia sa však počtom neutrónov. Chemické prvky sa v prírode najčastejšie vyskytujú ako zmes rozličných izotopov.

Elektroneutrálny atóm obsahuje rovnaký počet elektrónov ako protónov.

1.2 Kvantová teória

Energia nie je atómom vyžarovaná alebo pohlcovaná spojito, ale v celistvých násobkoch elementárneho kvanta energie. Veľkosť tohto elementárneho kvanta energie je úmerná frekvencii žiarenia podľa vzťahu:

$$W = hf \quad (1.1)$$

kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konštanta,

f [Hz] je frekvencia žiarenia.

Dôkazom platnosti kvantovej teórie je vysvetlenie fotoelektrického javu podaného A. Einsteinom (1905). Jav predpokladá, že svetlo je zložené z elementárnych častíc elektromagnetického žiarenia – z fotónov.

Fotón je elementárna častica nesúca elementárne kvantum elektromagnetickej energie, ktorá má nulovú pokojovú hmotnosť a pohybuje sa rýchlosťou svetla. Energia fotónu je úmerná frekvencii žiarenia podľa vzťahu (1.1). Každé elektromagnetické vlnenie (od rádiových vln, cez viditeľné svetlo až po gama žiarenie) je kvantované na fotóny.

Po dopadnutí svetla na kov fotóny odovzdávajú energiu elektrónom v atómoch kovu. Časť energie je spotrebovaná na uvoľnenie elektrónov z atómu vo forme výstupnej práce W_1 a zvyšok energie si elektrón odnesie vo forme kinetickej energie. Elementárne kvantum energie hf dopadajúceho fotónu je súčtom týchto dvoch energií:

$$hf = W_1 + \frac{mv^2}{2} \quad (1.2)$$

kde m predstavuje v tomto prípade hmotnosť elektrónu $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg,

v [m.s⁻¹] je rýchlosť elektrónu,

$W_1 = hf_0$ výstupná práca, v ktorej f_0 [Hz] je charakteristická frekvencia žiarenia.

Pre každú časticu s energiou W možno podľa Einsteinovej rovnice $W = mc^2$ vypočítať jej hmotnosť. Fotón s energiou W_f má hmotnosť:

$$m_f = \frac{W_f}{c^2} \quad (1.3)$$

kde $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je rýchlosť svetla.

1.3 Bohrov model atómovej štruktúry

Niels Bohr v roku 1917 predstavil teóriu vodíkového atómu. Sformulovaná je do **troch Bohrových postulátov**:

1. Elektrón môže nadobudnúť len stav, pre ktorý je moment hybnosti elektrónu rovný celočíselnému násobku \hbar , pričom $\hbar = h/2\pi$:

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (1.4)$$

čo vyjadruje, že elektrón sa pohybuje po kruhovej dráhe spĺňajúcej kvantovú podmienku $2\pi mvr = nh$, kde m je hmotnosť, v rýchlosť elektrónu, r je polomer stabilnej kruhovej dráhy po ktorej elektrón obieha okolo jadra, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ je Planckova konštanta a n kvantové číslo nadobúdajúce celočíselné hodnoty $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Elektrón sa v obale atómu môže nachádzať len v definovaných stavoch, t.j. každá kvantová dráha predstavuje určitý stacionárny stav elektrónu v atóme. Tento stav charakterizuje hlavné kvantové číslo n . Jednotlivé stavy sa odlišujú obsahom energie.
3. Elektrón vyžaruje alebo absorbuje energiu len pri prechode medzi stacionárnymi stavmi, pričom rozdiel ich energií je vyžiarený alebo pohltý vo forme fotónu s charakteristickou frekvenciou f :

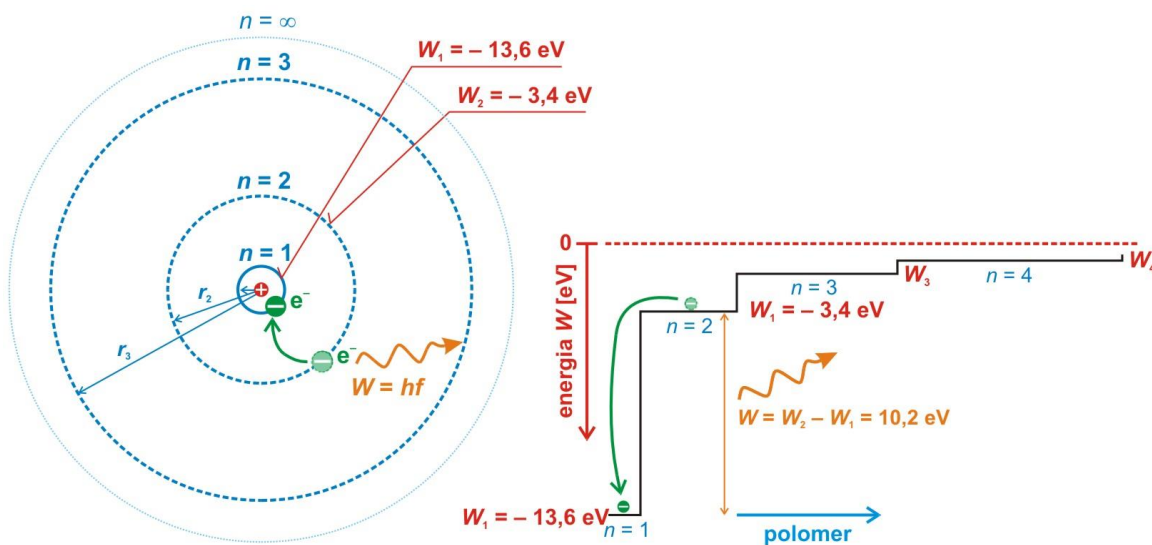
$$hf = W_n - W_m \quad (1.5)$$

kde h je Planckova konštanta. Ak $m < n$, elektrón vyžiari energiu o veľkosti hf a dostane sa do nižšieho energetického stavu. V opačnom prípade musí energiu s touto veľkosťou absorbovať čím sa dostane do vyššieho energetického stavu na vyššej vrstve elektrónového obalu.

Najnižšia energia W_1 prislúcha elektrónu na prvej kvantovej dráhe $n = 1$ a predstavuje atóm vodíka v základnom stave. Vybudenie elektrónu do excitovaného stavu nastáva ak sa elektrónu dodá energia prislúchajúca rozdielu energií dvoch kvantových dráh. Elektrón sa v tomto prípade nachádza na vyššej kvantovej dráhe, ale nakoľko to nie je stabilný stav, v čase $\sim 10^{-8} \text{ s}$ sa vracia do základného stavu a emituje energiu vo forme fotónu. Táto energia je podľa 3. Bohrovho postulátu rovná rozdielu energií hladín, medzi ktorými elektrón prechádza.

Bohrova teória je dobre aplikovateľná na atómy vodíkového typu, teda s jediným elektrónom, ako jedenkrát ionizované hélium (He^+) a dvakrát ionizované lítium (Li^{++}), aj keď s odchýlkami v dôsledku väčšieho náboja jadra.

Voľné atómy v ionizovanom stave vysielajú diskrétné spektrum elektromagnetického žiarenia, ktoré je určené 3. Bohrovým postulátom. Vlnová dĺžka elektromagnetického žiarenia ionizovaného atómu teda jednoznačne charakterizuje jeho typ a na základe spektra môžeme identifikovať daný prvok.



Obr. 1.3 Bohrov model atómu

1.4 Vlnový charakter elektrónu

V roku 1924 vyslovil de Broglie myšlienku vlnového charakteru elektrónov. Poukázal na skutočnosť, že pre fotóny musia platiť Planckova aj Einsteinova rovnica:

$$W = hf \quad (1.6)$$

$$W = mc^2 \quad (1.7)$$

Spojením rovníc (1.6) a (1.7) je vlnová dĺžka fotónu:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc} \quad (1.8)$$

Analogicky ako pre fotón je charakteristická vlnová dĺžka elementárnej častice (napr. elektrónu) s hmotnosťou m daná rovnakou rovnicou:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{hv}{W} = \frac{h}{mv} \quad (1.9)$$

Z Bohrovej teórie atómu vyplýva **pohybová rovnica** pre atóm vodíka, podľa ktorej je odstredivá sila (mv^2/r) pôsobiaca na elektrón v dôsledku krúživého pohybu okolo jadra zhodná s príťažlivou silou jadra (danou Coulombovou príťažlivou silou $q^1q^2/4\pi\epsilon_0r^2$) voči tomuto elektrónu:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r^2} \quad (1.10)$$

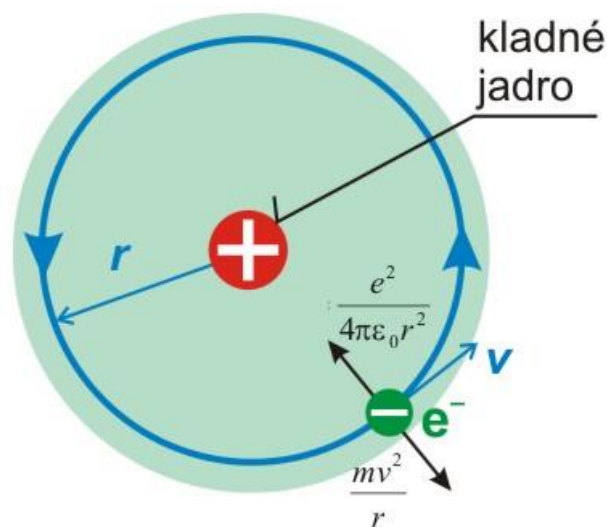
kde m je hmotnosť elektrónu,

v je rýchlosť elektrónu,

r je polomer kruhovej dráhy po ktorej elektrón obieha okolo atómového jadra,

$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C je elementárny náboj elektrónu,

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Fm⁻¹ je permitivita vákuu.



Obr. 1.4 Základné zloženie atómu – znázornenie pohybovej rovnice

Odvođením a dosadením rýchlosti elektrónu je potom vlnová dĺžka elektrónu v atóme vodíka v základnom stave:

$$\lambda = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r}{m}} \quad (1.11)$$

V základnom stave odpovedá dráha elektrónu jednej elektrónovej vlne. Pre vyššie dráhy možno z prvého Bohrovho postulátu odvodiť, že elektrón obieha okolo jadra bez vyžarovania energie, ak obvod kruhovej dráhy je n násobkom jeho vlnovej dĺžky:

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = n\lambda \quad (1.12)$$

1.5 Vlnová funkcia, kvantové čísla

Vlnový charakter pohybu elektrónov opísal Schrödinger v r. 1927 vlnovou rovnicou. Riešením rovnice pre jeden hmotný bod a časovo ustálený dej sú kvantové čísla n , l a m . Zahrnutím spinového kvantového čísla s predstavuje úplnú vlnovú funkciu. Konfigurácia kvantových čísel určuje umiestnenie elektrónov na kvantových dráhach.

Hlavné kvantové číslo n označuje elektróny jednej vrstvy. Nadobúda hodnoty celých kladných čísel $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Prvých sedem vrstiev označujeme veľkými písmenami K, L, M, N, O, P, Q .

Vedľajšie kvantové číslo l charakterizuje dráhy elektrónov líšiacich sa energiou v rámci jednej vrstvy. Nadobúda hodnoty celých čísel $l = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Vedľajšie kvantové číslo určuje orbitály, ktoré označujeme ich s, p, d, f (zodpovedajúce hodnote $l = 0, 1, 2, 3$). Každá vrstva má konštantný počet orbitálov. Orbitál označuje vlnovú funkciu závislú od súradníc vymedzujúcich priestor pohybu elektrónu.

Magnetické kvantové číslo m súvisí s rozložením dráh v priestore a takisto rozlišuje elektróny podľa energie. Nadobúda hodnôt celých čísel $m = \{-l, \dots, -1, 0, 1, \dots, +l\}$. Daný orbitál sa v magnetickom poli štiepi na $2l+1$ skupín.

Spinové kvantové číslo s určuje smer rotácie elektrónu okolo svojej osi – spin. Nadobúda hodnoty $\pm 0,5$.

Základné informácie o kvantových číslach vystihuje nasledujúca prehľadová tabuľka:

Tab. 1.2 Kvantové čísla

kvantové číslo		hodnota	alternatívne označenie	špecifikácia
n	hlavné	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...	K, L, M, N, O, P, Q	číslo vrstvy v elektrónovom obale
l	vedľajšie	0, 1, 2, 3 ... $n-1$	s, p, d, f	typ orbitálu vo vrstve
m	magnetické	$-l \dots 0 \dots l$	$p_x, p_y, p_z, d_{xy} \dots$	magnetický moment hybnosti elektrónu
s	spinové	$\pm \frac{1}{2}$		vnútorný moment hybnosti elektrónu

Kvantový stav elektrónu je určený úplnou vlnovou funkciou, špecifikovanou štyrmi kvantovými číslami. Na základe štúdia atómových spektier definoval Pauli **princíp výlučnosti**, resp.:

Pauliho vylučovací princíp: v atóme nemôžu existovať dva elektróny s rovnakým kvantovým stavom, a teda ani s rovnakou konfiguráciou kvantových čísel.

Z uvedených pravidiel vyplývajú aj maximálne počty elektrónov vo vrstvách a orbitáloch. Maximálny počet elektrónov na orbitáli daného typu je:

$$n_l = 2(2l + 1) \quad (1.13)$$

a z toho maximálny počet elektrónov vo vrstve:

$$n_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2 \quad (1.14)$$

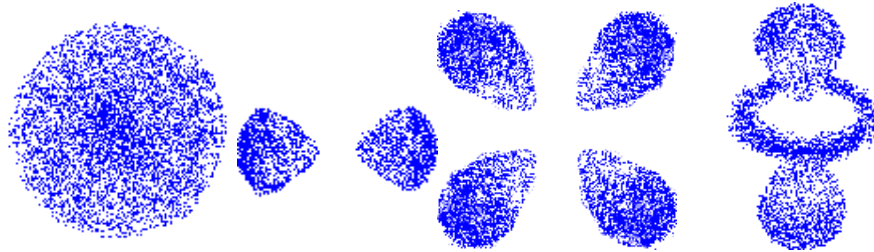
Číselne vyjadrené maximálne počty elektrónov na prvých štyroch orbitáloch a vrstvách podľa rovníc (13) a (14) sú vyjadrené v nasledujúcej tabuľke:

Tab. 1.3 Počty elektrónov na prvých štyroch orbitáloch

n_l	$2(2l+1)$	n_n	$2n^2$
n_s	$2(2 \cdot 0 + 1) = 2$	n_K	$2 \cdot 1^2 = 2$
n_p	$2(2 \cdot 1 + 1) = 6$	n_L	$2 \cdot 2^2 = 8$
n_d	$2(2 \cdot 2 + 1) = 10$	n_M	$2 \cdot 3^2 = 18$
n_f	$2(2 \cdot 3 + 1) = 14$	n_N	$2 \cdot 4^2 = 32$

1.6 Elektrónové orbitály

Pravdepodobnosť výskytu elektrónu v istej vzdialenosti od jadra možno opísať trojrozmerným zobrazením, definujúcim oblasti vysokej pravdepodobnosti výskytu elektrónu vo vnútri obalovej plochy.



Obr. 1.5 Medzný povrch orbitálov, zľava orbitál s ($l = 0$), orbitál p_x ($l = 1, m = -1, 0, 1$) a orbitály d_{xy} a d_z ($l = 2, m = -2, -1, 0, 1, 2$) (podobne d_{xz}, d_{yz}, \dots)

Orbitály s podobnou energiou tvoria energetické vrstvy. V atómoch viacelektrónových prvkov sú coulombovské interakcie medzi elektrónmi tak slabé, že ich energetické stavy sú približne rovnaké ako v atóme vodíka. Modely zložitejších atómov preto možno formálne budovať z „vodíkových“ orbitálov. Poradie obsadzovania orbitálov je v zmysle od orbitálu s najnižšou energiou.

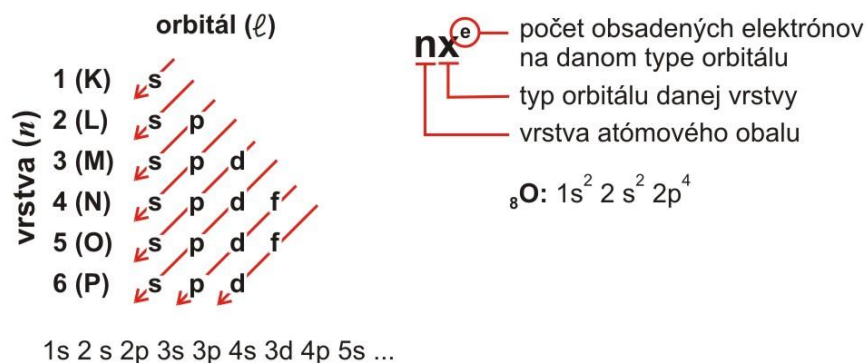
Pre zápis elektrónovej konfigurácie je používaný tvar n^l , kde n predstavuje číslo vrstvy, l označenie typu orbitálu pomocou písmen ($s, p, d, a f$) na danej vrstve n a i je počet obsadených elektrónov na tomto orbitáli. Elektrónová konfigurácia hélia tak nadobúda tvar $1s^2$ a lítia $1s^2 2s^1$. Orbitál p je možné označovať ako p_x, p_y a p_z , no postačuje uviesť počet elektrónov na orbitáli v zmysle

Hundovo pravidla maximálnej multiplicity:

- elektróny sa neumiestňujú do jedného orbitálu po dvoch (nevytvárajú páry), kým tomu nebráni snaha minimálnej energie atómu, teda snaha maximálnej stability,
- elektróny umiestnené po jednom v niekoľkých orbitáloch majú rovnaký spin.

Z toho vyplýva, že elektróny obsadzujú orbitály tak, aby pred ich spinovým párovaním bolo na orbitáloch daného typu čo najviac elektrónov s rôznym magnetickým číslom.

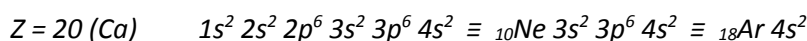
Napríklad pre uhlík je elektrónová konfigurácia $1s^2 2s^2 2p_x 2p_y$ ale postačuje zápis v tvare $1s^2 2s^2 2p^2$. Pri pomyselnom zvyšovaní atómového čísla dôjde až po obsadení p_z k ich spárovaniu. Vrstvu uzatvára neón s elektrónovou konfiguráciou $1s^2 2s^2 2p^6$.



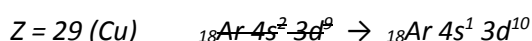
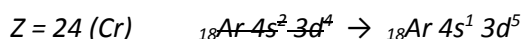
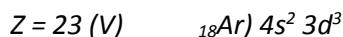
Obr. 1.6 Pravidlo obsadzovania orbitálov

Podobne to platí i pre orbitál d , najprv však bude obsadzovaný orbitál s vyššej vrstvy, pretože elektrón potrebuje na jeho obsadenie nižšiu energiu. Poradie orbitálov podľa energie sa mení s nábojom jadra.

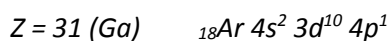
Elektrónová konfigurácia atómu vápnika tak nadobúda tvar:



Navyše sú v pravidelnosti usporiadania výnimky, napríklad u chrómu a medi je orbitál „s“ najbližšej vyššej vrstvy ochudobnený o jeden elektrón, pretože tento uzatvára orbitál „d“ v rámci spinu:



Tretia vrstva je kompletná a po opätovnom spárovaní $4s$ sa začína zaplňovať orbitál $4p$:

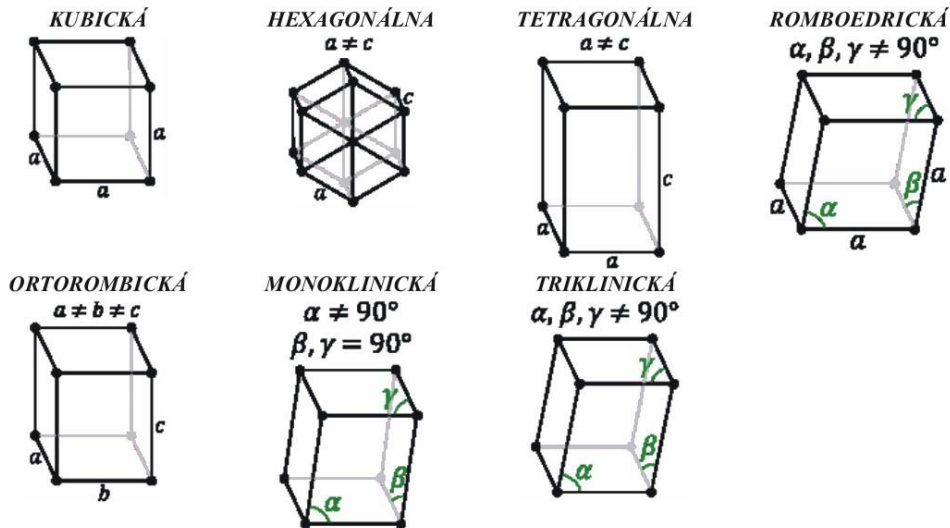


1.7 Kryštalové štruktúry

Chaotický tepelný pohyb atómov a molekúl pri dostatočne vysokej teplote znemožňuje ich usporiadanie väzbami. Väzbová energia elektrónov v obale atómov je $4 \div 25$ eV, kovalentných väzieb $3 \div 8$ eV, iónových $3 \div 4$ eV a van der Waalsových $0,01 \div 0,1$ eV. Preto látky s kovalentnou a iónovou

väzbou majú podstatne vyššie body tavenia, ako látky s van der Waalovou väzbou. *Stredná tepelná energia* kT je pre izbovú teplotu 0,3 eV. Pre 10^5 K je už 10 eV, čo znemožňuje akúkoľvek väzbu.

Jednoduché kryštalografické sústavy



Obr. 1.7 Kryštalové štruktúry

Kryštalová mriežka je sústava atómov, molekúl alebo iónov v objeme kryštálu taká, že ich usporiadanie je identické okoliu ktoréhokoľvek mriežkového uzla. Bravaisove mriežky je 7 základných sústav: kosoštvorcová (S, Ga), štvorcová (β Sn, TiO_2), kubická (Cu, Ag, Au, Al, Fe), šesťuholníková (Zn, Mg, AsNi), romboedrická (As, Sb, Bi), trojklonná, monoklonná. Množstvo fyzikálnych dejov prebieha prednostne v určitých mriežkových rovinách. Kryštalové mriežky opisujeme Millerovými indexmi kryštalografickej roviny a kryštalografického smeru. **Elementárna bunka kryštalovej mriežky** je základná stavebná jednotka, ktorá obsahuje základný motív kryštalovej sústavy.

Poznámka

Elektrónvolt (značka eV) je fyzikálna jednotka energie. Jeden elektrónvolt je rovný kinetickej energii, ktorú získa jeden neviazaný elektrón pri prechode medzi dvomi bodmi s rozdielom elektrostatického potenciálu rovným jednému voltu, vo vákuu. Jeden elektrónvolt je veľmi malé množstvo energie:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

1.8 Riešené príklady

Príklad 1.1: Vypočítajte kinetickú, potenciálnu a celkovú energiu elektrónu atómu vodíka v jeho základnom stave. Vychádzajte z Bohrovej teórie a energie vyjadrite v eV.

Riešenie: Podľa pohybovej rovnice je odstredivá sila pôsobiaca na elektrón v dôsledku krúživého pohybu okolo jadra zhodná s príťažlivou silou jadra voči tomuto elektrónu:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.15)$$

kde $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg je hmotnosť elektrónu,

v [m.s⁻¹] je jeho orbitálna rýchlosť,

r [m] je polomer orbitálnej dráhy,

$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C je elementárny náboj elektrónu,

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ je permitivita vákua.

Dosadením 1. Bohrovho postulátu $2\pi mvr = nh$ do vzťahu (1.15) a úpravou dostaneme pre polomer dráhy elektrónu atómu vodíka:

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2} \quad [m] \quad (1.16)$$

Kinetickú energiu elektrónu odvodíme dosadením pohybovej rovnice (1.15) do vzťahu pre výpočet kinetickej energie:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad [J] \quad (1.17)$$

Dosadením polomeru z rovnice (1.16) do (1.17) dostaneme výsledný vzťah pre kinetickú energiu elektrónu na n-tej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli atómu, ktorá má tvar:

$$W_k = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{8 \cdot (8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 1)^2} = 13,61 \text{ eV} \quad (1.18)$$

Z Coulombovho zákona je sila medzi dvoma bodovými nábojmi daná vzťahom:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [N] \quad (1.19)$$

Práca, ktorú treba v elektrickom poli intenzity E vynaložiť na prenesenie náboja zo vzdialenosti r_1 do r_2 od referenčného náboja jadra je:

$$A = e \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = W_{r_1} - W_{r_2} \quad [J] \quad (1.20)$$

odkiaľ dostaneme potenciálnu energiu elektrónu vo vzdialenosti r_2 od referenčného náboja. Dosadením polomeru z rovnice (1.16) dostávame výsledný vzťah pre potenciálnu energiu elektrónu na n -tej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli atómu:

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot (8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 1)^2} = -27,22 \text{ eV} \quad (1.21)$$

Celková energia elektrónu atómu vodíka na n -tej kvantovej dráhe je daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie na tej istej (n -tej) kvantovej dráhe:

$$W_c = W_k + W_p = -W_k \quad (1.22)$$

Pre základný energetický stav elektrónu ($n = 1$) je potom jeho celková energia $W_c = 13,61 - 27,22 = -13,61 \text{ eV}$.

Zároveň z porovnania vzťahov (18) a (21) vyplýva:

$$W_c = -W_k = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad [J] \quad (1.23)$$

Výsledná energia reprezentuje základnú energetickú hladinu elektrónu v atóme vodíka a jej záporný charakter značí, že elektrón je viazaný k jadrú a teda nemá dostatok energie pre opustenie atómu.

Príklad 1.2: Vypočítajte energiu elektrónu atómu vodíka, ktorá sa uvoľní pri jeho prechode zo stavu určeného hlavným kvantovým číslom $n = 2$ do základného. Vypočítajte frekvenciu a vlnovú dĺžku pritom vyžiareného svetla.

Riešenie: Vybudovaný elektrón s energiou W_2 pri návrate do základného stavu s energiou W_1 emituje energiu vo forme fotónu. Táto energia je podľa 3. Bohrového postulátu rovná rozdielu energií hladín medzi ktorými prechádza:

$$\Delta W = W_{c2} - W_{c1} \quad [J] \quad (1.24)$$

Dosadením do vzťahu (1.23) pre konkrétne kvantové stavy do vzťahu (1.24) je energia fotónu:

$$\Delta W = -3,403 + (-13,61) = 10,207 \text{ eV}$$

Základnou jednotkou energie je [J], a tak energia fotónu:

$$\Delta W = \Delta W[\text{eV}] \cdot e = 10,207 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 1,635 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Charakteristická frekvencia žiarenia fotónu je z Planckovho vzťahu rovná:

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} = 2,47 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Vlnová dĺžka žiarenia fotónu:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 121,4 \text{ nm}$$

Vlnová dĺžka tohto žiarenia spadá do ultrafialovej oblasti EMG žiarenia.

1.9 Neriešené príklady

Príklad 1.3 Vypočítajte energiu a polomer dráhy elektrónu v atóme vodíka pre prvé 4 dovolené stavy. Vychádzajte z Bohrovej teórie a energiu vyjadrite v eV.

$$[n=1: W_1=-16,608 \text{ eV}; n=2: W_2=-3,402 \text{ eV}; n=3: W_3=-1,512 \text{ eV}; n=4: W_4=-0,8505 \text{ eV}]$$

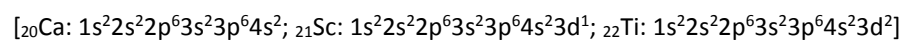
Príklad 1.4 Vypočítajte energiu elektrónu atómu vodíka uvoľnenú jeho prechodom zo stavu $n=6$ do stavu $n=5$ a vypočítajte frekvenciu a vlnovú dĺžku pri tom vyžiareného svetla.

$$[\Delta W=2,71 \cdot 10^{-20} \text{ J}; \lambda=7,33 \text{ } \mu\text{m}; f=4,09 \cdot 10^{13} \text{ Hz}]$$

Príklad 1.5 Na základe vzťahov medzi n , l , m zostavte do tabuľky všetky možné kvantové stavy odpovedajúce hodnote $n=3$.

$$[n=3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3; l=0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2; m=0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2]$$

Príklad 1.6 Aká je elektrónová konfigurácia prvkov s atómovými číslami 20 (vápnik), 21 (skandium), 22 (titán)?



2. Vodivé materiály

2.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom

Vodivé materiály sú materiály vedúce elektrický prúd, pričom ich elektrická vodivosť je založená na báze elektrónovej alebo iónovej vodivosti.

Kovy sú kryštalické látky s kovovými väzbami u ktorých je vedenie elektrického prúdu sprostredkované prenosom elektrónov, pričom nedochádza k žiadnym pozorovateľným chemickým zmenám. V elektrotechnickej praxi sa využíva predovšetkým ich vysoká vodivosť.

Odporové materiály sú materiály s vysokou rezistivitou, väčšinou vyrábané zo zliatin kovov. Ich odpor voči elektrickému prúdu sa využíva predovšetkým pri premene elektrickej energie na teplo a na výrobu rezistorov.

Supravodiče sú špeciálnou skupinou vodivých materiálov, ktorých elektrická vodivosť je pri teplote blízkej absolútnej nule veľmi vysoká.

Elektrický prúd je fyzikálna veličina vyjadrujúca množstvo elektrického náboja, ktorý prejde vodičom za jednotku času. Ako jav vo vodičoch predstavuje stav usmerneného pohybu voľných elektrónov pôsobením elektrického poľa.

Stredná voľná dráha elektrónu je štatistická stredná hodnota dráhy, ktorú elektrón prekoná medzi dvoma zrážkami v kryštálovej mriežke vodiča.

2.2 Kvantová teória vodivosti kovov

Podľa kvantovej teórie veľkosť energie elektrónu, ktorý prešiel z jedného kvantového pásma s energiou W_1 do druhého s energiou W_2 , je daná Einsteinovým vzťahom:

$$W_1 - W_2 = hf \quad [J] \quad (2.1)$$

kde

$h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konštanta,

f [Hz] frekvencia absorbovanej/emítovanej častice.

Hodnota energie najvyššej hladiny, obsadenej pri teplote absolútnej nuly, sa nazýva **Fermiho energia** W_F .

Energiu Fermiho hladiny kovu je vo vzťahu ku koncentrácii voľných elektrónov možné vyjadriť rovnicou:

$$W_F = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad [J] \quad (2.2)$$

kde

$h = 6,6025 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konštanta,

$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg je hmotnosť elektrónu.

Aby elektrón mohol vystúpiť z kovu do vákuá, potrebuje energiu značne väčšiu ako je W_F . Túto energiu W nazývame **výstupná práca**.

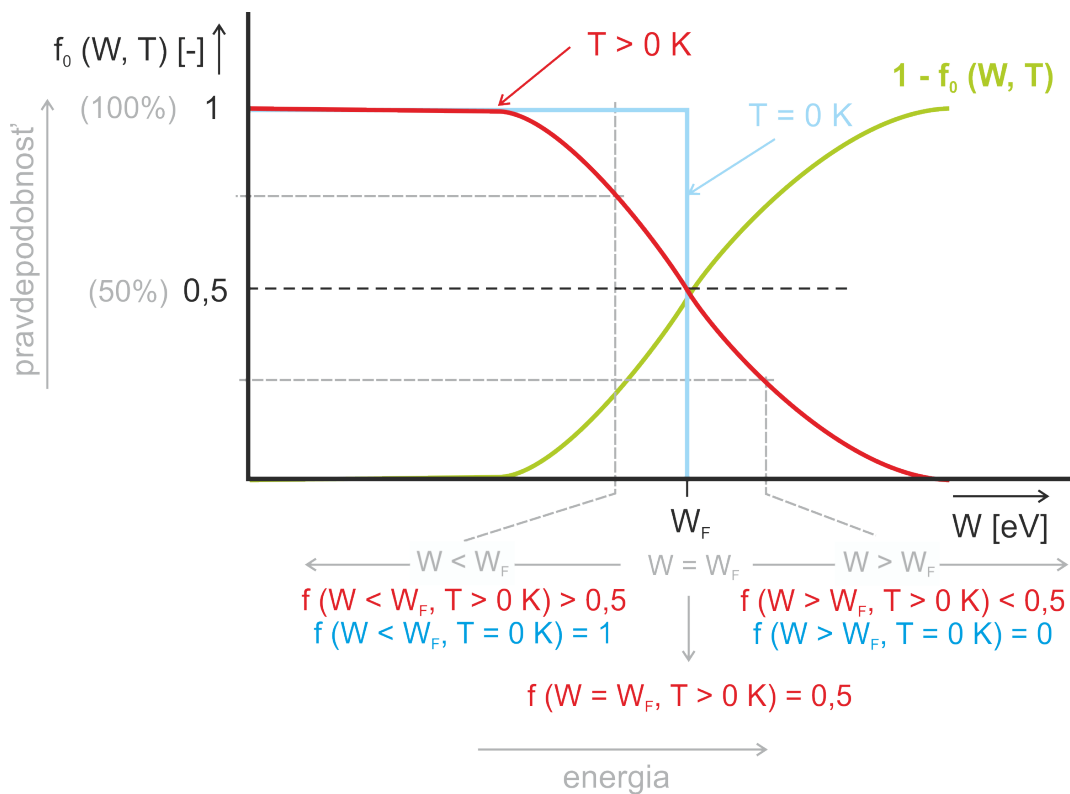
Pravdepodobnosť, s akou sa zaplňujú energetické hladiny, je možné vypočítať pomocou **Fermi-Diracovej rozdeľovacej funkcie**:

$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - W_F}{kT}\right) + 1} \quad (2.3)$$

kde

W [J] je energia uvažovanej hladiny,

W_F [J] je energia Fermiho hladiny.



Obr. 2.1 Znáznornenie Fermi-Diracovej rozdeľovacej funkcie

Poznámka

exp predstavuje exponenciálnu funkciu v tvare:

$$\exp(x) = e^x$$

e – je Eulerovo číslo, ktoré tvorí základ prirodzeného logaritmu (e=2,718281828...)

- Ak $T = 0 \text{ K}$ a $W < W_F$, potom podľa vzťahu (3) je $\exp(-\infty) \rightarrow 0$, a preto pravdepodobnosť obsadenia hladiny je $f_{FD} = 1$. Z toho vyplýva, že energetické hladiny s menšou hodnotou ako W_F sú obsadené elektrónmi.
- Ak $T = 0 \text{ K}$ a $W > W_F$, potom $\exp(+\infty) \rightarrow +\infty$ a $f_{FD} = 0$ z čoho vyplýva, že všetky energetické hladiny s vyššou než W_F sú prázdne.
- Ak $W = W_F$, potom $\exp(0) \rightarrow 1$ $f_{FD} = 0,5$.

Pri nenulových hodnotách teploty dochádza k tepelnej excitácii elektrónov, čiže elektróny nadobúdajú vyšších hodnôt energie ako W_F . Časť energetických hladín pod W_F nie je celkom obsadená elektrónmi, pretože elektróny preskočia na hladiny energeticky vyššie.

2.3 Elektrické vlastnosti kovov

Najdôležitejšou elektrickou vlastnosťou kovov je ich **elektrická vodivosť**, ktorú vysvetľuje elektrónová teória kovov ako následok pohybu voľných elektrónov v kryštálovej mriežke kladných iónov.

Voľné elektróny sa vo vodiči pohybujú neusporiadane, rôznymi smermi a rýchlosťami. Pôsobením elektrického poľa dôjde k usmerneniu chaotického pohybu voľných elektrónov vo vodiči.

Predpokladajme, že hustota (koncentrácia) elektrónov je n elektrónov v 1 m^3 . Intenzita elektrického poľa spôsobí, že elektróny sa budú pohybovať v jej smere, v dôsledku čoho sa objaví okamžitá **hustota prúdu**:

$$J = env \quad [A \cdot m^{-2}, C, m^{-3}, m \cdot s^{-1}] \quad (2.4)$$

kde

$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ je elektrický náboj elektrónu,

v [$m \cdot s^{-1}$] je stredná driftová rýchlosť elektrónov v smere intenzity elektrického poľa.

Okamžitá hodnota sily pôsobiacej na elektrón je:

$$F = ma = eE \quad [N, C, V \cdot m^{-1}] \quad (2.5)$$

pričom platí:

$$a = \frac{v}{\tau} \Rightarrow m \frac{v}{\tau} = eE \quad [m \cdot s^{-2}] \quad (2.6)$$

kde

$E [V \cdot m^{-1}]$ je okamžitá hodnota intenzity elektrického poľa v predpokladanom mieste,

$\tau [s]$ je relaxačná doba – doba, za ktorú sa elektrón udrží voľný.

Zo vzťahu (2.4) a (2.6) dostaneme:

$$J = \frac{e^2 E n \tau}{m} \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (2.7)$$

v ktorom výraz:

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad [S \cdot m^{-1}] \quad (2.8)$$

predstavuje **konduktivitu** (mernú elektrickú vodivosť) vodiča. Dosadením rovnice (2.8) do (2.7) je hustota prúdu daná vzťahom:

$$J = \gamma E \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (2.9)$$

ktorý predstavuje Ohmov zákon v diferenciálnej forme. **Rezistivita** (merný elektrický odpor) vodiča je obrátenou hodnotou konduktivity:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \quad [\Omega \cdot m] \quad (2.10)$$

Rezistivita ρ udáva odpor vodiča dlhého 1 m o priereze 1 m² pri danej teplote 20°C. Jeho jednotkou je $[\Omega m]$.

Kryštálová mriežka kovov alebo zliatiny kovov kladie usporiadanému pohybu voľných elektrónov určitý odpor $R [\Omega]$. Odpor vodiča závisí na jeho rozmeroch, jeho materiáli, teplote a ďalších činiteľoch. Pri danej teplote je odpor vodiča určený svojou dĺžkou l , priemerom S a rezistivitou ρ materiálu podľa vzťahu:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega] \quad (2.11)$$

Vzťah (2.11) platí pre prípad, keď vodičom prechádza jednosmerný alebo striedavý prúd s malou frekvenciou. Vysokofrekvenčnému prúdu kladie vodič väčší odpor ako jednosmernému prúdu. Zväčšenie odporu pri vyšších frekvenciách súvisí s tzv. povrchovým zhustením prúdu (skinefekt).

Rovnica (2.9) je Ohmov zákon vyjadrujúci lineárnu závislosť hustoty prúdu na intenzite elektrického poľa vo vodiči. Ak zavedieme pojem pohyblivosti nosiča náboja u ako podiel rýchlosti v a intenzity elektrického poľa E , potom:

$$u = \frac{v}{E} = \frac{e\tau}{m} \quad [m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}] \quad (2.12)$$

po dosadení rovnice (2.12) do (2.8) je konduktivita vodiča daná vzťahom:

$$\gamma = enu \quad [S \cdot m^{-1}] \quad (2.13)$$

Konduktivita kovov je teda závislá na náboji elektrónov, na ich pohyblivosti a koncentrácii.

V kovoch je koncentrácia elektrónov konštantná, mení sa len ich pohyblivosť.

Pri teplote 0 K je pohyblivosť elektrónov najmenej rušená tepelnými pohybmi iónov a voľná dráha je najdlhšia. S rastúcou teplotou sa počet zrážok elektrónov s iónmi zvyšuje a pohyb elektrónov kryštálom je intenzívne brzdený.

Pohyb elektrónov môže byť brzdený aj poruchami mriežky ako sú vakencie, intersticiálne atómy, dislokácie, atómy nečistôt, hranice zrn.

Ak označíme rezistivitu ovplyvnenú tepelným pohybom iónov $\rho(T)$ a rezistivitu ovplyvnenú poruchami kryštálu alebo prímiesami ρ_0 , môžeme celkovú rezistivitu kovu vyjadriť rovnicou:

$$\rho = \rho_0 + \rho(T) \quad [\Omega \cdot m] \quad (2.14)$$

ktorá odpovedá Mathiessenovmu pravidlu. Elektrický odpor čistých kovov je úmerný absolútnej teplote.

Závislosť elektrického odporu vodičov na teplote je vo veľkom teplotnom intervale prakticky lineárna a môžeme ju vyjadriť vzťahom:

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta\vartheta) \quad [\Omega] \quad (2.15)$$

Teplotný súčiniteľ odporu $\alpha [K^{-1}]$ udáva, koľkokrát sa zväčší odpor pri zahriati vodiča o $1^\circ C$, $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ je teplotný rozdiel [K] a $R_0 [\Omega]$ počiatočný odpor vodiča.

Takisto rezistivita závisí na teplote lineárne podľa vzťahu:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta\vartheta) \quad [\Omega \cdot m] \quad (2.16)$$

2.4 Termoelektrické vlastnosti kovov

Vodivým spojením dvoch kovov vzniká kontaktný potenciál. Predpokladajme rovnakú koncentráciu elektrónov v oboch kovoch. Ich spojením dôjde k vyrovnaniu ich Fermiho hladín tunelovým prechodom elektrónov alebo pri vyšších teplotách termoemisiou elektrónov z kovu s menšou výstupnou prácou W_{K1} (vyššou Fermiho hladinou) do kovu s väčšou výstupnou prácou W_{K2} , ktorý vzhľadom k prebytku elektrónov získa záporný náboj. Potenciálový rozdiel stykových plôch:

$$U_K = \frac{W_{K2} - W_{K1}}{e} \quad [V] \quad (2.17)$$

Uzavretím obvodu a uvedením spojených koncov na rozličné teploty potečie elektrický prúd v dôsledku termoelektrického napätia., vzniknutého z dvoch nezávisle vzniknutých napätí – kontaktného a objemového. Objemové napätie vzniká difúziou voľných nosičov náboja z oblasti s vyššou teplotou do oblasti s nižšou, čím sa elektrická rovnováha týchto oblastí porušuje a vzniká potenciálový rozdiel brániaci ďalšej difúzii.

2.5 Tepelná vodivosť

Tepelná vodivosť kovov udáva ich schopnosť viesť tepelnú energiu. **Merná tepelná vodivosť** λ_T [$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$] udáva množstvo tepla, ktoré prejde za 1 s kockou s hranou 1 m z danej látky medzi dvoma protiľahlými stenami, medzi ktorými je teplotný rozdiel 1 K. Najväčšiu mernú tepelnú vodivosť majú čisté kovy s veľkou elektrickou vodivosťou ako sú striebro, meď, zlato a hliník.

Pomer mernej tepelnej vodivosti λ_T ku konduktivitě γ je priamo úmerný termodynamickej teplote a je pre všetky kovy rovnaký, t. j. nezávisí na druhu kovu.

$$\frac{\lambda_T}{\gamma} = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2} T \quad (2.18)$$

Vzťah (2.18) je Wiedemann-Franzov zákon, kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmanova konštanta.

2.6 Supravodivosť

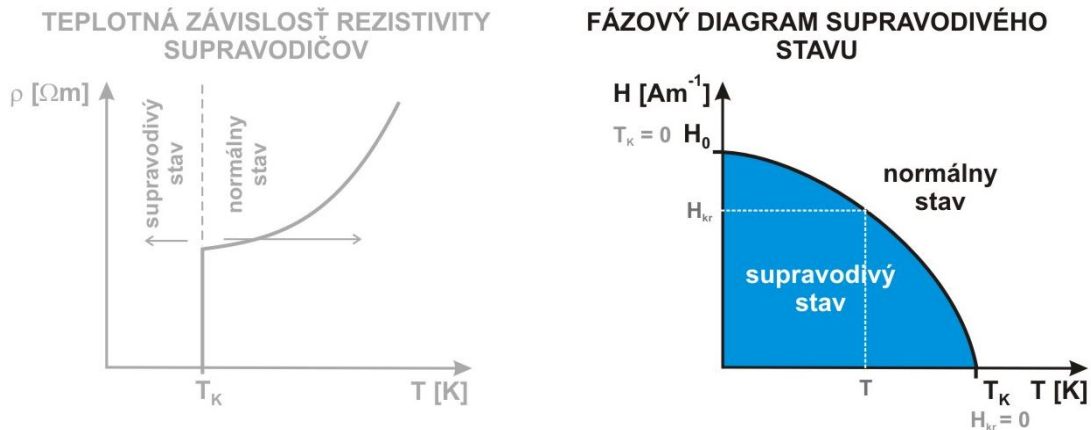
U niektorých kovov, zliatin a kovových zlúčenín pri teplotách blízkyh absolútnej nule odpor klesá nekontinuálne, skokom na hodnotu teoreticky nulovú - nastáva jav supravodivosti.

Supravodivý stav sa v supravodičoch udržuje, len ak sú splnené tri podmienky:

- a) teplota supravodiča je nižšia, ako kritická teplota T_K ,

b) intenzita magnetického poľa je nižšia ako kritická intenzita H_K ,

c) hustota prúdu, ktorý preteká vodičom, je nižšia ako kritická hustota J_K .



Obr. 2.2 Teplotná závislosť rezistivity supravodičov a fázový diagram supravodivého stavu

Intenzita magnetického poľa, pri ktorej stav supravodivosti pri danej teplote T [K] zaniká, je definovaná ako kritická intenzita magnetického poľa H_K [Am^{-1}]. Jej závislosť na teplote u všetkých supravodičov môžeme vyjadriť vzťahom:

$$H_K = H_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_K} \right)^2 \right) \quad (2.19)$$

supravodivý materiál je potom definovaný parametrami H_0 a T_0 .

2.7 Riešené príklady

Príklad 2.1: Aké množstvo elektrického náboja Q prejde vodičom za 10 sekúnd, keď a) prúd je stály s hodnotou 5 A, b) prúd rovnomerne rastie od nuly do 3 A.

Riešenie:

a) Z definície elektrického prúdu vo vodiči vyplýva:

$$Q = I \cdot t = 5 \times 10 = 50 \text{ C}$$

b) Elementárny elektrický náboj dQ , ktorý pretečie vodičom za čas dt pri pretekajúcom prúde I je daný:

$$dQ = I \cdot dt$$

kde I je v rámci zadania príkladu lineárnou funkciou času s konštantou úmernosti k . Výsledný vzťah pre prúd potom bude:

$$I = k \cdot t \text{ [A]}$$

$$k = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ As}^{-1}$$

Po dosadení dostaneme:

$$dQ = k \cdot t \cdot dt \quad [C]$$

Integráciou dostaneme množstvo elektrického náboja:

$$Q = k \int_0^{10} t \cdot dt = \frac{k}{2} [t^2]_0^{10} = \frac{0,3}{2} 10^2 = 15 \text{ C}$$

Príklad 2.1: Elektrický obvod sa skladá z troch vodičov rovnakej dĺžky, zhotovených z rovnakého materiálu, ktoré sú zapojené za sebou. Prierezy vodičov sú $S_1 = 1 \text{ mm}^2$, $S_2 = 2 \text{ mm}^2$, $S_3 = 3 \text{ mm}^2$. Napätie na koncoch takto vytvoreného vodiča je 10 V. Vypočítajte úbytok napätia na každom vodiči.

Riešenie: Najskôr určíme odpory jednotlivých vodičov zo vzťahu medzi odporom, jeho geometrickými rozmermi a rezistivitou:

$$R_1 = \rho \frac{l}{S_1} \quad R_2 = \rho \frac{l}{S_2} \quad R_3 = \rho \frac{l}{S_3} \quad [\Omega]$$

Celový odpor bude:

$$R = \rho \frac{l}{S_1} + \rho \frac{l}{S_2} + \rho \frac{l}{S_3} = \rho l \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) \quad [\Omega]$$

Každým vodičom potečie prúd:

$$\begin{aligned} U_1 = R_1 \cdot I &= \frac{\rho \cdot l}{S_1} \frac{U S_1 S_2 S_3}{\rho \cdot l (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)} = \frac{1}{S_1} \frac{U S_1 S_2 S_3}{(S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)} = \\ &= \frac{1}{1} \frac{12 \times 1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3} = 5,45 \text{ V} \end{aligned}$$

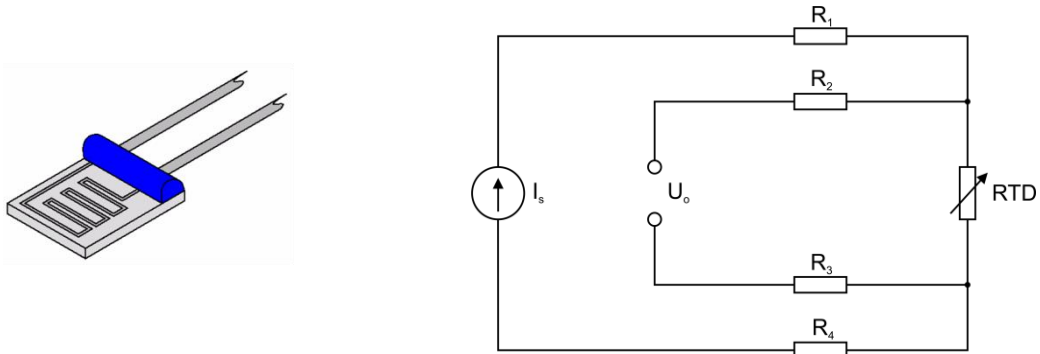
Podobne môžeme vypočítať :

$$U_2 = 2,73 \text{ V}; U_3 = 1,82 \text{ V}$$

Príklad 2.3 Vypočítajte teplotu prostredia, v ktorom sa nachádza platinový senzor PT100, ak je odmeraná hodnota jeho odporu 125 Ω .

Teoretický rozbor: Kovové odporové senzory (Resistance Temperature Detectors - RTD) obsahujú najčastejšie platinovú kovovú vrstvu vytvorenú na keramickom substráte. Pomerná zmena odporu na jednotku teploty je o niekoľko rádov menšia (teplotný koeficient odporu $\alpha = 0.003925$) ako

u termistorov, avšak ich presnosť, stabilita a linearita sú dôvodom ich použitia v presných meracích obvodoch.



Obr. 2.3 Štruktúra tenkovrstvového platinového senzora teploty a jeho zapojenie v meracom obvode (4-vodičová mostíková konfigurácia)

Riešenie: Platinové teplotné snímače majú takmer lineárnu závislosť odporu od teploty a pre bežné merania postačí definícia konštantného teplotného koeficientu odporu na široký rozsah meraných teplôt. Je definovaný ako pomerná zmena odporu senzora na jednotku teploty a je vzťahnutá voči referenčnej (izbovej) teplote:

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T} \cong \frac{1}{R_0} \frac{R - R_0}{T - T_0} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$$

z čoho je možné vyjadriť teplotu, v uvedenom prípade:

$$T = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} + T_0 = \frac{125 - 100}{3,925 \cdot 10^{-3} \cdot 100} + 293,15 = 356,49\text{K} = 83,34^\circ\text{C}$$

Príklad 2.4 Vypočítajte mernú tepelnú vodivosť medi, keď jej merný elektrický odpor je $1,724 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

Teoretický rozbor: Elektrická vodivosť kovov je podmienená existenciou voľných elektrónov, pričom počet valenčných elektrónov nie je určujúcim faktorom. Transport elektrického náboja má tak priamy súvis s transportom tepelnej energie. Vysoká pohyblivosť elektrónov vyplýva do vysokej elektrickej i tepelnej vodivosti kovov a ich použitia ako médií pre chladenie elektronických obvodov. Najväčšiu vodivosť majú kovy pri nulovej absolútnej teplote, pretože pri nulových tepelných kmitoch atómov je najnižšia pravdepodobnosť zrážok s elektrónmi.

Tab. 2.1 Rezistivita vybraných kovov

Kov	Ag	Cu	Au	Al	Zn	Ni
ρ [$10^{-8} \Omega\text{m}$]	1,6	1,8	2,4	2,7	6	6,9
Počet valenčných elektrónov	1	1	1	3	2	2

Riešenie: Pomer mernej tepelnej a elektrickej vodivosti je podľa Wiedemann – Franzovho zákona priamo úmerný absolútnej teplote:

$$\frac{\lambda_T}{\gamma} = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2} T = 2,44 \cdot 10^{-8} T \Rightarrow \lambda_T = 2,44 \cdot 10^{-8} \frac{T}{\rho} = 414,9 \frac{W}{Km}$$

Z toho vyplýva jednoznačný súvis tepelnej a elektrickej vodivosti. Elektricky najvodivejší kov, striebro, je tak zároveň tepelne najvodivejším kovom. Vzhľadom na vlastnosti a cenu kovových materiálov sú najpoužívannejšími kovovými chladiacimi médiami meď a hliník.

Príklad 2.5 Pri rekonštrukcii napájacích rozvodov má 15 m medený vodič nahradiť hliníkový rovnakej dĺžky. Aký bude pomer ich hmotností, ak celkový odpor vodiča má ostať nezmenený?

Teoretický rozbor: V súčasnosti sa pre vnútorné rozvody elektrickej energie používajú takmer výhradne medené vodiče. Oproti v minulosti preferovanému hliníku má meď nesporné výhody v mechanických vlastnostiach (nižšia miera tzv. tečenia, vyššia mechanická odolnosť), vyššej elektrickej vodivosti i koróznej odolnosti. Ich zámena je realizovaná pri rekonštrukcii rozvodov.

- Merná hmotnosť medi je 8890 a hliníka 2700 kg/m³.
- Merný elektrický odpor medi je 1,724 · 10⁻⁸ a hliníka 2,94 · 10⁻⁸ Ωm.

Riešenie: Pomer hmotností vodičov:

$$\frac{m_{Cu}}{m_{Al}} = \frac{M_{Cu} V_{Cu}}{M_{Al} V_{Al}} = \frac{M_{Cu} S_{Cu} l}{M_{Al} S_{Al} l} = \frac{M_{Cu} \rho_{Cu} \frac{l}{R}}{M_{Al} \rho_{Al} \frac{l}{R}} = \frac{M_{Cu} \rho_{Cu}}{M_{Al} \rho_{Al}} = 1,93$$

Príklad 2.6 Vypočítajte prúd tečúci medeným vodičom prierezu 1 mm², ak je pri pôsobiacom elektrickom poli stredná driftová rýchlosť elektrónov 1,5 · 10⁻⁴ m/s.

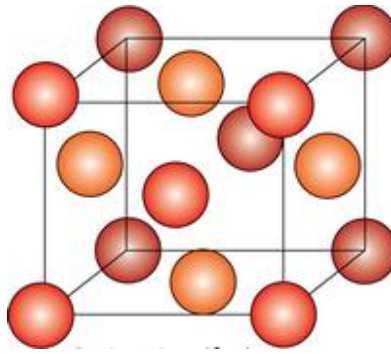
Teoretický rozbor: Elektrický prúd kovovým vodičom je pri pôsobiacej intenzite elektrického poľa závislý od pohyblivosti voľných elektrónov vodiča, resp. jeho vodivosti. Výpočet prúdových pomerov je nevyhnutný pri návrhu elektronických štruktúr, pretože elektrické pomery priamo súvisia s tepelnými.

Riešenie: Prúd kovovým vodičom v závislosti na driftovej rýchlosti a koncentrácii elektrónov:

$$I = J \cdot S = e \cdot n \cdot v \cdot S = 1,201 A$$

Príklad 2.7 Vypočítajte, koľko voľných elektrónov obsahuje 1 m³ medeného vodiča?

Teoretický rozbor: Znalosť množstva voľných elektrónov v elementárnom objeme vodiča umožňuje vypočítať jeho vodivosť. Medený vodič má vnútornú štruktúru danú kubickou plošne centrovanou elementárnou bunkou, obsahujúcou 4 atómy. V objeme 1 m³ počet týchto elementárnych buniek 1/a³, kde *a* je mriežkový parameter, u medi za normálnych fyzikálnych podmienok 3,61 · 10⁻¹⁰ m.



Obr. 2.4 Kubická plošne centrovaná mriežka

Riešenie: Atóm medi poskytuje 1 vodivostný elektrón, z čoho vyplýva, že počet, resp. koncentrácia voľných elektrónov v elementárnom objeme je identická s koncentráciou samotných atómov:

$$n_{Cu} = \frac{n_{elem} n_{vod}}{a^3} = \frac{4,1}{(3,597 \cdot 10^{-10})^3} = 8,59 \cdot 10^{28} m^{-3}$$

Príklad 2.8 Vypočítajte špecifický odpor medeného vodiča pri teplote 85°C, ak je špecifický odpor medi za normálnych fyzikálnych podmienok $1,724 \cdot 10^{-8} \Omega m$ a teplotný koeficient odporu 0,004041.

Teoretický rozbor: Teplotná závislosť kovových vodičov je definovaná teplotným koeficientom odporu (TCR). Vzhľadom na charakter vplyvu teploty na vodivosť čistých kovov má kladný charakter. Je to pomerná zmena odporu na jednotku teploty a v určitom teplotnom rozsahu môže mať lineárnu závislosť na teplote. Pre aplikácie, kde je vyžadovaná minimálna teplotná závislosť odporu vodiča, sú používané špeciálne zliatiny s kompenzovaným TCR.

Riešenie: Pre uvedený teplotný rozsah je možné uvažovať konštantný teplotný koeficient odporu. Z jeho definície možno odvodiť odpor medeného vodiča pri zadanej teplote:

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T} \cong \frac{1}{R_0} \frac{R - R_0}{T - T_0} \left[\frac{1}{^{\circ}C} \right] \Rightarrow R = R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) \Rightarrow \rho = \rho_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = 2,177 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

2.8 Neriešené príklady

Príklad 2.9 Aký je merný elektrický odpor hliníka pri teplote 20°C, ak odpor hliníkového vodiča s priemerom 2 mm a dĺžkou 15 m je pri teplote 20°C rovný 0,14 Ω?

$$[\rho = 2,93 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m]$$

Príklad 2.10 Vypočítajte merný elektrický odpor medi, ak odpor 15 m dlhého vodiča s prierezom 0,1 mm² pri teplote 20°C je 2,58 Ω.

$$[\rho=1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}]$$

Príklad 2.11 Vypočítajte prúd a prúdovú hustotu kovového vodiča s prierezom $0,5 \text{ mm}^2$, ak 1 m^3 obsahuje $5 \cdot 10^{28}$ voľných elektrónov a ak stredná driftová rýchlosť elektrónov je $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$.

$$[I=0,7209 \text{ A}; J=14,418 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}]$$

Príklad 2.12 Vypočítajte strednú driftovú rýchlosť elektrónov v medenom vodiči s prierezom 2 cm^2 , cez ktorý preteká prúd 1 A a s prierezom 4 cm^2 , cez ktorý preteká prúd 100 A .

$$[v_{I=1 \text{ A}}=3,703 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; v_{I=100 \text{ A}}=1,851 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Príklad 2.13 Medeným vodičom s priemerom $0,8 \text{ mm}$ prechádza prúd $0,5 \text{ A}$. Vypočítajte strednú driftovú rýchlosť, pohyblivosť, elektrickú intenzitu a prúdovú hustotu, ak koncentrácia elektrónov je $5,53 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ a merný elektrický odpor medi je $1,724 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$.

$$[v=1,123 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; u=6,548 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}; E=0,01715 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; J=9,95 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}]$$

Príklad 2.14 Vodič s dĺžkou $1,5 \text{ km}$ a prierezom 5 mm^2 je pripojený na napätie 100 V . Vypočítajte prúdovú hustotu, intenzitu elektrického poľa, pohyblivosť voľných elektrónov a ich driftovú rýchlosť, ak koncentrácia voľných elektrónov je $8,427 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ a merný elektrický odpor vodiča je $1,724 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$.

$$[J=3,866 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}; E=6,666 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; u=4,296 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}; v=2,864 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Príklad 2.15 Strieborný vodič s prierezom $0,2 \text{ mm}^2$ a dlhý 100 m je pripojený na napätie 100 V . Aká je relaxačná doba voľných elektrónov, pohyblivosť a stredná driftová rýchlosť, ak merný elektrický odpor striebra pri teplote $20 \text{ }^\circ\text{C}$ je $1,54 \cdot 10^{-8} \Omega$ a koncentrácia voľných elektrónov striebra je $5,8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$?

$$[\tau=3,973 \cdot 10^{-14} \text{ s}; u=6,9885 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}; v=6,9885 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Príklad 2.16 Koncentrácia voľných elektrónov v medi pri teplote 20°C je $8,427 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Aká je energia Fermiho hladiny tohto kovu? Výsledok vyjadrite v eV.

$$[W_F=7,0087 \text{ eV}]$$

Príklad 2.17 Určte, s akou pravdepodobnosťou zaujme elektrón v kove pri teplote $20 \text{ }^\circ\text{C}$ energetický stav o $0,1 \text{ eV}$ nižší a o $0,1 \text{ eV}$ vyšší, ako je Fermiho hladina.

$$[P(W)_{0,1\text{eV}}=0,0187=1,87\%; P(W)_{-0,1\text{eV}}=0,9813=98,13\%]$$

Príklad 2.18 Aká je kritická hodnota prúdu pre olovený drôt s priemerom 1 mm v nulovom magnetickom poli, ktorý je chladený na $4,2 \text{ K}$, ak kritická teplota supravodivého stavu olova pri neprítomnosti magnetického poľa je $7,22 \text{ K}$ a kritická intenzita magnetického poľa pri teplote absolútnej nuly je $6,45 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-3}$.

$$[I_c=134,06275 \text{ A}]$$

Príklad 2.19 Vypočítajte pohyblivosť elektrónov v medi pri teplote 20 °C, ak merná tepelná vodivosť medi je pri tejto teplote $414,8 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ a koncentrácia elektrónov v medi je $8,427 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Vychádzajte z Wiedemann-Franzovho zákona.

$$[u=4,293 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}]$$

Príklad 2.20 Určte teoretickú hodnotu termoelektrického napätia v termočlánku, ktorého vetvy tvoria meď a tantal, pričom teplotný rozdiel miest spojov oboch kovových materiálov je 65°C. Koncentrácia elektrónov v medi je $8,427 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ a v tantale $5,53 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

$$[U_T=2,3587 \cdot 10^{-3} \text{ V}]$$

Príklad 2.21 Koľko elektrónov musí prechádzať vodičom za 1 sekundu, aby ním tiekol prúd 1; 5 a 100 A?

$$[n_{I=1 \text{ A}}=6,24 \cdot 10^{18}; n_{I=5 \text{ A}}=31,2 \cdot 10^{18}; n_{I=100 \text{ A}}=624,2 \cdot 10^{18}]$$

Príklad 2.22 Supravodivá zliatina Nb_3Sn má kritickú teplotu supravodivého stavu pri neprítomnosti magnetického poľa 17,95K. V magnetickom poli, s intenzitou $8,9 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, supravodivý stav zaniká pri teplote $T=8,2 \text{ K}$. Vypočítajte kritickú intenzitu magnetického poľa H_K pri teplote $T=0 \text{ K}$.

$$[H_K=1,124 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Príklad 2.23 Vypočítajte najmenšiu vlnovú dĺžku fotónov, ktorú môžu vyvolať výstup elektrónov z povrchu céziovej a wolfrámevej katódy vákuového fotočlánku. Výstupná práca elektrónov z cézia je $W_{\text{Cs}}=1,81 \text{ eV}$ a z wolfrámu $W_{\text{W}}=4,52 \text{ eV}$.

$$[\lambda_{\text{Cs}}=684,4 \text{ nm}; \lambda_{\text{W}}=274 \text{ nm}]$$

3. Magnetické materiály

3.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom

Hlavné **materiálové charakteristiky** magnetických materiálov sú:

- a) **Relatívna permeabilita μ_r** , ktorá je závislá od intenzity magnetického poľa a od teploty a je definovaná vzťahom:

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \quad (3.1)$$

- b) **Magnetická susceptibilita κ** , ktorá súvisí s relatívnou permeabilitou vzťahom:

$$\kappa = \mu_r - 1 \quad (3.2)$$

- c) **Curieho teplota T_c** , pri ktorej zaniká feromagnetický (ferimagnetický) stav a magnetické materiály prechádzajú do paramagnetického stavu.

- d) **Indukcia nasýtenia B_s** (magnetická indukcia) charakterizujúca magnetické nasýtenie:

$$B = \mu H \quad (3.3)$$

- e) **Remanencia B_r** , t.j. magnetická indukcia pri nulovej intenzite magnetického poľa po predchádzajúcej magnetizácii do nasýtenia.

- f) **Koercivita H_c** , t.j. intenzita magnetického poľa, ktorá je potrebná, aby po predchádzajúcej magnetizácii do nasýtenia poklesla magnetická indukcia na nulovú hodnotu.

Straty v magnetických materiáloch vznikajú pri procese premagnetovania magnetických materiálov v striedavom poli. Sú sprevádzané oteplením a vyjadrujú sa stratovým číslom, mernými stratami alebo stratovým činiteľom $tg\delta$. Pre zníženie strát je potrebné vybrať materiál s úzkou hysteréznou slučkou, t.j. s veľmi malou koercivitou, resp. so zvýšenou rezistivitou. Celkové straty sa delia na: hysterézne (magnetizačné) straty, straty vírivými prúdmi a straty zvyškové.

Maximálny súčin $(BH)_m$ je charakteristická veličina pre hodnotenie magneticky tvrdých materiálov, určuje sa graficky z tvaru hysteréznej slučky a udáva sa v Jouloch na kubický meter (Jm^{-3}).

Činiteľ pravouhlosti R vyjadruje vydutie hysteréznej slučky v druhom kvadrante. Udáva pomer magnetickej indukcie B pri intenzite magnetického poľa $-H_m/2$ k maximálnej magnetickej indukcii B_m na danej hysteréznej slučke, definovanej intenzitou magnetického poľa H_m . Činiteľ pravouhlosti je vyjadrený vzťahom:

$$R = \frac{B(-H_m/2)}{B(H_m)} \quad (3.4)$$

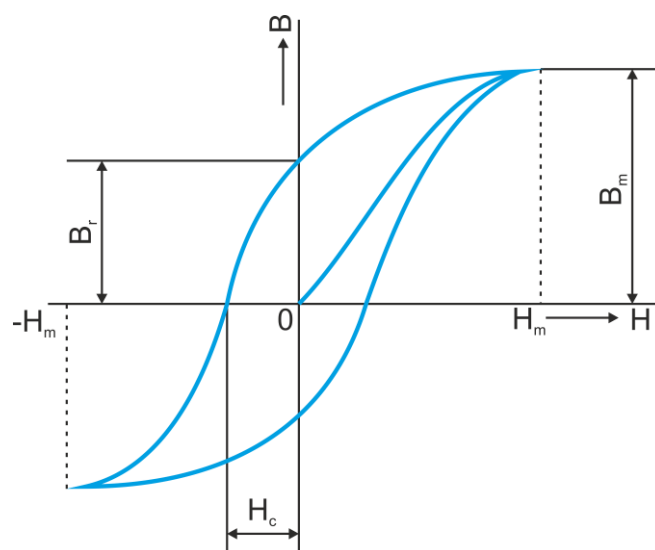
3.2 Magnetizačné charakteristiky

Pri konkrétnych aplikáciách feromagnetík (ferimagnetík) je veľmi dôležité poznať ich magnetické vlastnosti za rôznych prevádzkových podmienok. Keďže závislosť magnetickej indukcie B od intenzity magnetickeho poľa H v týchto materiáloch nie je lineárna, ich vlastnosti sa vyjadrujú hlavne magnetizačnými krivkami. **Magnetizačné krivky** sú závislosti magnetickej indukcie B (alebo od magnetickej polarizácie J) od intenzity magnetickeho poľa H . Magnetizačné krivky sa získavajú meraním za definovaných podmienok (tvar vzorky, časový priebeh magnetizujúceho poľa, atď.), najčastejšie sa vyjadrujú graficky v podobe krivky prvotnej magnetizácie, resp. komutačnej krivky a hysteréznej slučky. S uvedenými krivkami súvisia charakteristické veličiny ako napr. koercivita H_c , indukcia nasýtenia B_s , remanentná indukcia B_r , permeabilita, atď.

Javom *magnetická hysterézia* sa označuje zaostávanie zmien magnetizácie, príp. magnetickej indukcie za zmenami intenzity magnetickeho poľa.

Krivka prvotnej magnetizácie je charakteristika feromagnetika pri jeho stacionárnom magnetovaní z odmagnetovaného stavu ($H = 0, B = 0$) až do nasýtenia. Hysterézia je prejavom nevratnosti magnetizačných procesov v látke.

Hysterézná slučka je magnetizačná charakteristika feromagnetika pri cyklickom (periodickom) premagnetovaní pri zvyšovaní intenzity magnetickeho poľa v jednotlivých **cykloch**. Až po dosiahnutí hodnoty intenzity poľa $+H_m$ sa bude feromagnetikum premagnetovávať cyklickou zmenou poľa z $+H_m$ do $-H_m$ a naopak, pričom zmena indukcie zodpovedá hodnotám, ktoré ležia na hysteréznej slučke a nie na primárnej krivke. Vrcholy hysteréznych slučiek pre rôzne maximálne hodnoty H_m (resp. B_m) ležia na komutačnej krivke, ktorá, až na nízke hodnoty intenzity poľa, je totožná s krivkou prvotnej magnetizácie.



Obr. 3.1 Všeobecný tvar hysteréznej slučky

Hodnota magnetickej indukcie, ktorá zostane vo feromagnetiku po znížení intenzity magnetického poľa na nulu je **remanentná indukcia** B_r . Možno ju zrušiť opačne orientovaným poľom s hodnotou rovnajúcou sa **intenzite koercitívneho poľa** H_c . Vo feromagnetiku sa môže odmerať nekonečne veľa tzv. súmerných hysterézných slučiek, ale iba jedna je limitná (maximálna) hysterézna slučka). Vtedy sa maximálna indukcia rovná nasýtenej magnetickej indukcii $B_m = B_s$ a $H_m = H_s$. Na limitnej hysteréznej slučke sa určí limitná B_r , ktorá sa nazýva **remanentivita**, a podobne na tejto hysteréznej slučke sa určí aj limitná hodnota H_c , tzv. koercivita. Hodnoty H_c , B_r a B_s na limitnej hysteréznej slučke sú uvádzané ako orientačné parametre pre použitie magnetických materiálov. Okrem magnetizačných kriviek sa charakterizujú vlastnosti feromagnetík závislosťami magnetizačnej permeability alebo magnetickej susceptibility od intenzity magnetického poľa.

Magnetická permeabilita μ (Hm^{-1}) je parameter, ktorý charakterizuje schopnosť látky zmeniť svoju magneticú indukciu vplyvom intenzity magnetického poľa. Magnetická permeabilita vo feromagnetikách je zložitou funkciou H (podobne ako susceptibilita). Je závislá od fyzikálnych vlastností materiálu a súvisí i s geometriou vzorky.

Veľmi dôležitými charakteristikami z hľadiska magnetických vlastností sú závislosti magnetickej susceptibility od teploty. V magnetickom poli sa magnetické momenty paramagnetických atómov natáčajú do smeru vonkajšieho poľa. Proti usmerňujúcemu vplyvu magnetického poľa pôsobí dezorientujúci vplyv tepelného pohybu atómov mriežky. Vplyv teploty na magnetizáciu paramagnetík vyjadruje Curieho zákon, pre ktorý platí:

$$\kappa_r = \frac{C}{T} \quad (3.5)$$

Teplotnú závislosť u feromagnetík vyjadruje Curieho - Weissov zákon:

$$\kappa_r = \frac{C}{T - T_e} \quad (3.6)$$

kde

C je Curieho konštanta a T_c je Curieho teplota.

V teórii elektromagnetického poľa je zavedený parameter **absolútna magnetická susceptibilita** κ , definovaná vzťahom:

$$\kappa = \frac{1}{\mu_0} \frac{J}{H} \quad (3.7)$$

κ umožňuje vyjadriť vplyv magnetika na magneticú indukciu B . Magnetická indukcia po vložení magnetika do toroidu vzrastá o B_i a κ_i . Tento prírastok umožňuje vyjadriť pomocou vzťahu:

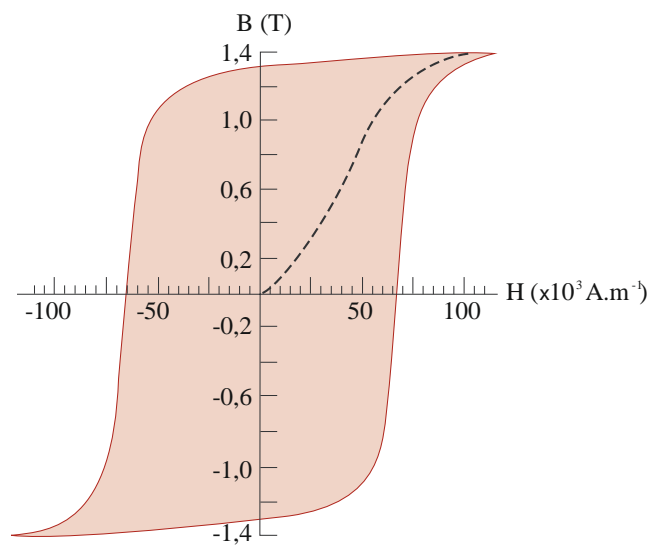
$$B_i = \kappa_r H \quad (3.8)$$

V praxi sa najčastejšie používa relatívna susceptibilita κ_r . Je daná podielom absolútnej magnetickej susceptibility a permeability vákua m_0 ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$). κ_r je bezrozmerná veličina, záporná pre látky diamagnetické a kladné pre paramagnetiká, pre ktorú platí:

$$\kappa_r = \kappa_r - 1 \quad (3.9)$$

3.3 Riešené príklady

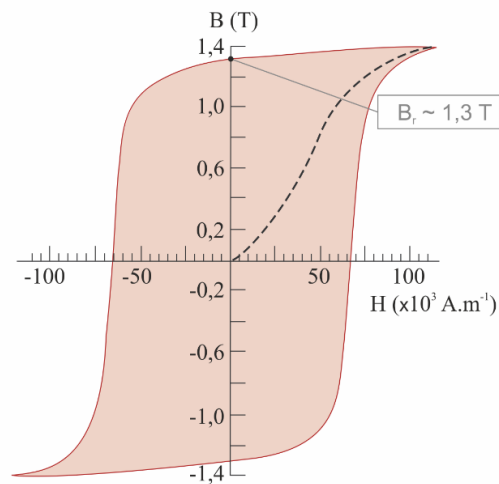
Príklad 3.1: Použitím hysteréznej slučky magnetickeho materiálu znázornenej na obrázku, určte nasledovné magneticke parametre: remanenciu, saturačnú magnetizáciu, koercitivitu, počiatočnú permeabilitu a maximálny súčin BH.



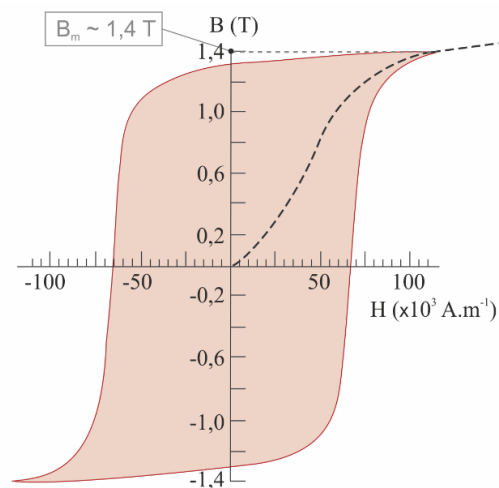
Obr. 3.2 Hysterézna slučka

Riešenie: Magnetizačná krivka je závislosť magnetickej indukcie B od intenzity magnetickeho poľa H , ktorá sa získava meraním. Vykazuje magneticú hystereziu (zaostávanie zmien magnetickej indukcie za zmenami intenzity magnetickeho poľa). Zvyčajne sa udáva pri magnetovaní do nasýtenia, t.j. do bodu, keď pri ďalšom zvyšovaní intenzity magnetickeho poľa sa magnetická indukcia mení už len minimálne, resp. má lineárny charakter.

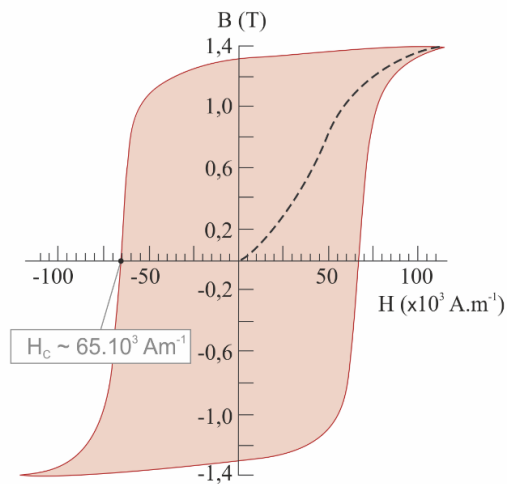
- (a) Magneticá remanencia B_r predstavuje bod na hysteréznej slučke pri nulovej intenzite magnetickeho poľa. Ide o zvyškovú magneticú indukciu, ktorá v materiáli ostáva aj po odstránení vonkajšieho magnetickeho poľa po predchádzajúcom magnetovaní do nasýtenia. Z grafu ju môžeme odčítať ako priesečník hysteréznej slučky s osou magnetickej indukcie, teda $B_r \approx 1,3 \text{ T}$

Obr. 3.3 Hysterézná slučka $B_r \approx 1,3 \text{ T}$

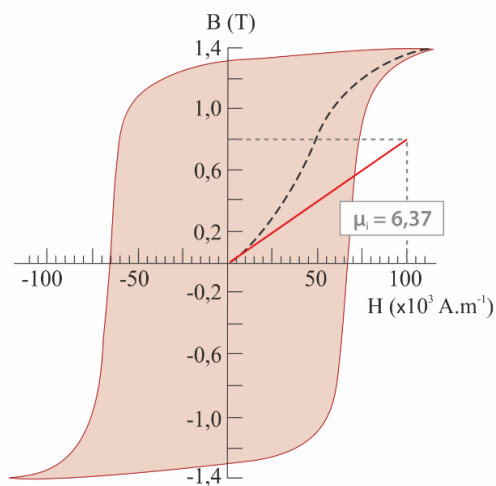
- (b) Saturačná magnetizácia je maximálna hodnota magnetickej indukcie na hysteréznej slučke, resp. na krivke prvotnej magnetizácie. Pri ďalšom zvyšovaní intenzity magnetického poľa sa magnetická indukcia od tohto bodu mení už len minimálne, resp. má lineárny charakter. Na grafe predstavuje indukciu v bode na konci krivky prvotnej magnetizácie, teda $B_m \approx 1,4 \text{ T}$

Obr. 3.4 Hysterézná slučka $B_r \approx 1,4 \text{ T}$

- (c) Magnetická koercitivita H_c je intenzita magnetického poľa, ktorá je potrebná na zrušenie magnetickej remanencie (t.j. aby po odstránení vonkajšieho magnetického poľa klesla remanentná indukcia na nulu). Na grafe predstavuje priesečník hysteréznej slučky s osou intenzity magnetického poľa. Nakoľko na vyrušenie magnetickej remanencie je potrebné magnetické pole opačnej orientácii ako bolo použité pri magnetovaní materiálu, odčítava sa na zápornej strane, teda $H_c \approx 65 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$

Obr. 3.5 Hysterézná slučka $H_c \approx 65 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$

- (d) Počiatočná permeabilita je smernica dotyčnice ku krivke prvotnej magnetizácie v počiatočnom bode ($H = 0$ a $B = 0$). Krivka prvotnej magnetizácie vzniká pri stacionárnom magnetovaní feromagnetika z odmagnetovaného stavu (t.j. z bodu $H = 0$ a $B = 0$, pri nulovej magnetickej remanencii) – na grafe čiarkovaná čiara. Z grafu môžeme odhadnúť smer dotyčnice z počiatku krivky prvotnej magnetizácie ($H = 0 \text{ Am}^{-1}$ a $B = 0 \text{ T}$) smerom do bodu $H = 100 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$ a $B = 0,8 \text{ T}$. Za predpokladu, že $B = \mu_r \mu_0 H$, μ_i vieme vypočítať ako $\mu_i = (0,8 \text{ T}) / (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}) \approx 6,37$

Obr. 3.6 Hysterézná slučka $\mu_i \approx 6,37$

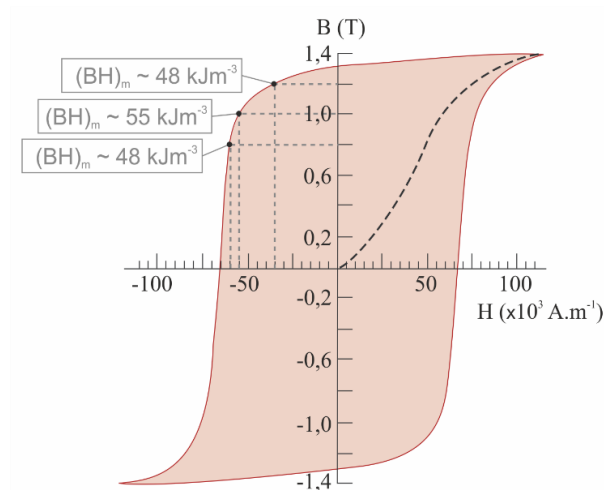
Poznámka: Závislosť B od H ($B = \mu_r \mu_0 H$) je v tomto prípade lineárna so smernicou $\mu_r \mu_0$, to ale platí len pre dotyčnicu. Nakoľko krivka prvotnej magnetizácie, resp. hysterézná slučka, nie je lineárna, v každom bode krivky vieme vypočítať relatívnu permeabilitu $\mu_r = B / (\mu_0 H)$, ktorá sa bude pre daný materiál meniť v závislosti od intenzity magnetického poľa.

(e) Maximálny súčin $(BH)_m$ je charakteristická veličina, pomocou ktorej sa hodnotia magneticky tvrdé materiály a permanentné magnety. Čím je tento súčin väčší, tým ťažšie sa materiál odmagnetizuje. Odhad maximálneho súčinu BH v štvrtom kvadrante spravíme na niekoľkých hodnotách, pričom zoberieme vždy kombináciu hodnôt B a H prislúchajúcich niekoľkým bodom na hysteréznej slučke:

$$1,2 \text{ T} \times 40 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1} = 48 \text{ kJm}^{-3}$$

$$1,0 \text{ T} \times 55 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1} = 55 \text{ kJm}^{-3}$$

$$0,8 \text{ T} \times 60 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1} = 48 \text{ kJm}^{-3}$$



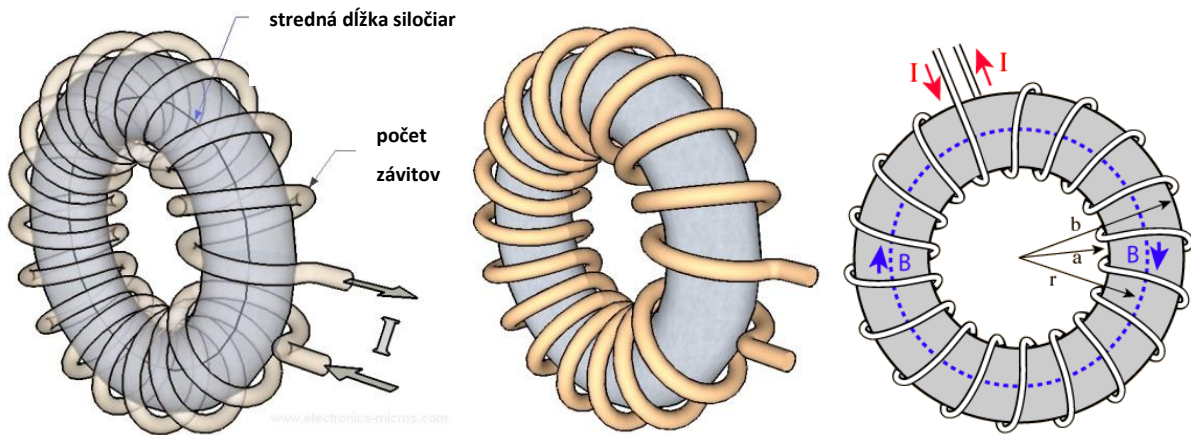
Obr. 3.7 Hysterézná slučka $(BH)_m \approx 55 \cdot 10^3 \text{ kJm}^{-3}$

Odhad maximálneho súčinu BH je maximálna hodnota vyrátaných súčinov BH , a teda $(BH)_m \approx 55 \cdot 10^3 \text{ kJm}^{-3}$

Príklad 3.2: Chceme vytvoriť cievku typu toroidu, ktorá by vytvorila pole o veľkosti 0,2 T. Kvôli obmedzenému priestoru má cievka len 10 závitov s aktívnou dĺžkou 1 cm. Predpokladaný prúd pretekajúci cievkou je 10 mA. Vyberte vhodný materiál jadra cievky tak, aby cievka spĺňala tieto požiadavky.

Riešenie: Požiadavkou je, aby cievka vytvorila magnetické pole s indukciou $B = 0,2 \text{ T}$. Z teórie vieme, že indukcia magnetického poľa je závislá od parametrov cievky a od materiálu jadra. Intenzita magnetického poľa vo vnútri cievky typu toroid je daná vzťahom $H = \frac{NI}{k}$, kde N je počet závitov, I prúd pretekajúci cievkou a k je stredná dĺžka siločiar. V prípade, ak sa takáto cievka nachádza vo vákuu a nemá žiadne jadro, magnetická indukcia bude $B_0 = \mu_0 H$, kde μ_0 je permeabilita vákuu ($\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$). Ak do takejto cievky ale vložíme magnetické jadro, celková indukcia sa zmení a bude daná vzťahom $B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H$, kde μ_r je relatívna permeabilita, ktorá predstavuje jednu zo základných

magnetických vlastností materiálu. Súčin $\mu_r\mu_0$ sa tiež označuje ako absolútna permeabilita (tiež permeabilita prostredia) a označuje sa symbolom μ bez indexu ($\mu = \mu_r\mu_0$).



Obr. 3.8 Toroidná cievka

Parametre cievky ako je počet závitov, aktívna dĺžka (zodpovedá stredná dĺžke siločiar k) ako aj prúd tečúci cievkou sú známe zo zadania príkladu. Ako prvú teda môžeme vypočítať intenzitu magnetického poľa H v cievke:

$$H = \frac{NI}{k} = \frac{(10) \cdot (0,01 \text{ A})}{(0,01 \text{ m})} = 10 \text{ Am}^{-1}$$

Ak chceme dosiahnuť magnetické pole s indukciou 0,2 T, potom absolútna permeabilita materiálu jadra musí byť minimálne:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{(0,2 \text{ T})}{(10 \text{ Am}^{-1})} = 0,02 \text{ Hm}^{-1}$$

Relatívna permeabilita materiálu je potom daná jednoduchým podielom absolútnej permeability a permeability vákua:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{(0,02 \text{ Hm}^{-1})}{(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1})} = 15\,915,5$$

Preskúmaním vlastností magnetických materiálov v tabuľke zistíme, že zliatina s označením 4750 s maximálnou permeabilitou 80 000 môže byť vhodným materiálom pre jadro cievky. Železo s vyšším obsahom kremíka s orientovanou štruktúrou má síce maximálnu permeabilitu 50 000, má ale relatívne nízku počiatočnú permeabilitu 1 400 (pre zliatinu 4750 je počiatočná permeabilita 11 000) a vyššiu saturačnú magnetizáciu $B_m = 2,01$ (pre zliatinu 4750 je saturačná magnetizácia 1,55). Z tvaru

magnetizačnej krivky možno preto očakávať, že požadovaná permeabilita 16 000 bude dosiahnutá až pri silnejších intenzitách magnetického poľa.

Tab. 3.1 Vlastnosti vybraných magneticky mäkkých materiálov

Názov	Zloženie	Permeabilita		Koercitivita	Remanencia	B_{max}	Rezistivita
		Počiatočná	Maximálna	H_c [A.m ⁻¹]	B_r [T]	[T]	[μΩ.m]
Ingot železa	99,8% Fe	150	5000	80	0,77	2,14	0,10
Nízkouhlíková oceľ	99,5% Fe	200	4000	100		2,14	1,12
Železo s vyšším obsahom kremíka, neorientovaná štruktúra	Fe-3% Si	270	8000	60		2,01	0,47
Železo s vyšším obsahom kremíka, orientovaná štruktúra	Fe-3% Si	1400	50 000	7	1,20	2,01	0,50
Zliatina 4750	Fe-48% Ni	11 000	80 000	2		1,55	0,48
4-79 permalloy	Fe-4% Mo-79% Ni	40 000	200 000	1		0,80	0,58
Vysoko legovaná zliatina	Fe-5% Mo-80% Ni	80 000	450 000	0,4		0,78	0,65
2V-Permendur	Fe-2% V-49% Co	800	450 000	0,4		0,78	0,65
Supermendur	Fe-2% V-49% Co		100 000	16	2,00	2,30	0,40
Metglas ^a 2650SC	Fe ₈₁ B _{13,5} Si _{3,5} C ₂		300 000	3	1,46	1,61	1,35
Metglas ^a 2650S-2	Be ₇₈ B ₁₃ S ₉		600 000	2	1,35	1,56	1,37
Ferit MnZn	H5C ^b	10 000		7	0,09	0,40	1,5.10 ⁵
Ferit MnZn	H5E ^b	18 000		3	0,12	0,44	5.10 ⁴
Ferit NiZn	K5 ^b	290		80	0,25	0,33	2.10 ¹²

^a Obchodná značka Allied Corporation

^b Označenie firmy TDK

Príklad 3.3 Pre uchytenie kovových predmetov sa často využívajú permanentné bremenové magnety. Pri niektorých aplikáciách, ako je napr. vsádzka do vysokej peci, či uchytenie zváraných častí počas zvárania, je magnet vystavený zvýšeným teplotám. Navrhnete magnet, ktorý by bol schopný zdvihnúť 35 ton aj za podmienok vysokej pracovnej teploty 750°C. Predpokladajte, že plocha priečného rezu magnetu je 1 m². Vyberte vhodný materiál z tabuľky.

Riešenie: Z fyziky je známe, že silu, ktorá pôsobí na teleso s hmotnosťou m vieme vypočítať podľa jednoduchého vzorca z Newtonovho zákona sily $F = m \cdot a$, kde a je zrýchlenie. Nakoľko na materiál pôsobí len zemská tiaž s gravitačným zrýchlením $g = 9,81 \text{ ms}^{-1}$ kolmo k jej povrchu, na zdvihnutie 35 ton materiálu potrebujeme vynaložiť minimálne rovnakú silu, pôsobiacu proti zemskej tiaži. Potrebná sila teda bude:

$$F = m \cdot a = (35\,000 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ ms}^{-1}) = 343\,350 \text{ N}$$

Jedným z parametrov, ktoré určujú vlastnosti magnetu je ich magnetizácia M_r . Ak poznáme magnetizáciu materiálu, je možné vyrátať silu, ktorú vie magnet vyvinúť. Sila, ktorú magnet vyvinie je daná vzťahom $F = \frac{\mu_0 M_r^2 S}{2}$, kde μ_0 je permeabilita vákua ($\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$) a S je pričný prierez magnetu. Nakoľko silu potrebnú na vyzdvihnutie 35 ton už poznáme, môžeme na základe tohto vzťahu vypočítať magnetizáciu M_r , ktorá určí aj vhodný materiál pre náš magnet. Potrebná magnetizácia bude:

$$M_r = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\mu_0 \cdot S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (343\,350 \text{ N})}{(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}) \cdot (1 \text{ m}^2)}} = 739\,415 \text{ Am}^{-1}$$

Súčin $\mu_0 M_r$ je jedným zo základných parametrov magnetu a predstavuje v podstate remanentnú indukciu. Ak tento súčin vyrátame, môžeme z tabuľky pre náš magnet vybrať vhodný materiál:

$$B_r = \mu_0 M_r = (4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}) \cdot (739\,415 \text{ Am}^{-1}) = 0,929 \text{ T}$$

Tab. 3.2 Vlastnosti vybraných magneticky tvrdých materiálov a permanentných magnetov

Materiál	Bežný názov	$\mu_0 \cdot M_r$ [T]	$\mu_0 \cdot H_c$ [T]	$(BH)_{max}$	T_c [°C]
Fe-Co	Co-steel	1,07	0,02	6	887
Fe-Co-Al-Ni	Alnico-5	1,05	0,06	44	880
BaFe ₁₂ O ₁₉	Ferit	0,42	0,31	34	469
SmCo ₅	Sm-Co	0,87	0,80	144	723
Nd ₂ Fe ₁₄ B	Nd-Fe-B	1,23	1,21	290-445	312

Z hľadiska potrebnej magnetickej indukcie ($\mu_0 \cdot M_r$) sú vhodné len 3 materiály: Co-steel, Alnico-5 a Nd-Fe-B, ktoré majú súčin $\mu_0 \cdot M_r$ väčší ako 0,929 T. Výber vhodného materiálu v praxi však musí byť dôsledný a musí zohľadňovať všetky pracovné podmienky. Do úvahy teda musíme ešte vziať aj pracovnú teplotu, nakoľko z teórie vieme, že ak teplota feromagnetického materiálu presiahne určitú kritickú teplotu, stáva sa paraelektrikom, a v podstate stráca svoje magnetické vlastnosti. Táto teplota sa nazýva Currieho teplota a značíme ju T_c . Nakoľko pracovná teplota je 750°C, do úvahy pripadajú len dva z týchto materiálov Co-steel a Alnico-5, pri ktorých je Currieho teplota nad touto pracovnou teplotou.

Príklad 3.4 Feritové jadierko zo zliatiny Fe-80% Ni má maximálnu permeabilitu 300 000. Jadierko je vložené do cievky s 20 závitmi s dĺžkou 2 cm. Aký prúd musí pretekať cievkou aby sme dosiahli magnetické pole s indukciou 0,35 T?

Riešenie: Príklad je obdobou príkladu 3.1, v ktorom bolo potrebné určiť a vybrať vhodný materiál jadra cievky tak, aby bolo dosiahnuté pole s požadovanou indukciou. Teraz je materiál jadra daný a je

potrebné stanoviť veľkosť prúdu, ktorá preteká cievkou tak, aby bola indukcia 0,35 T. Nakoľko $B = \mu H$, potom:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{0,35 \text{ T}}{(300\,000)(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1})} = 0,9284 \text{ Am}^{-1}$$

Prúd vypočítame zo vzťahu:

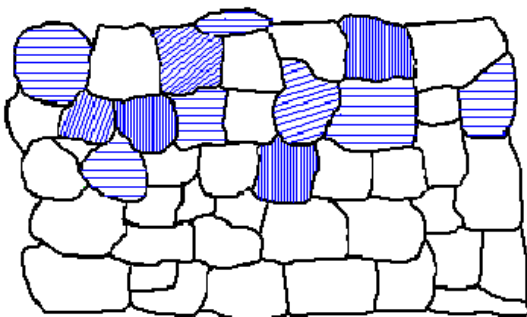
$$I = \frac{H \cdot l}{N} = \frac{(0,928 \text{ Am}^{-1})(0,02 \text{ m})}{(20)} = 930 \mu\text{A}$$

Príklad 3.5 Koercitivita pre čisté železo je závislá od veľkostí zŕn materiálu podľa empirického vzťahu $H_C = 1,83 + \frac{4,14}{\sqrt{S}}$, kde S je plocha zŕn v dvojrozmernom modeli. Ak predpokladáme, že koercitivita bude $71,62 \text{ Am}^{-1}$ a je závislá len od veľkosti zŕn, odhadnite veľkosť zŕn. Ako sa zmení koercitivita ak sa žíhaním zväčší veľkosť zŕn?

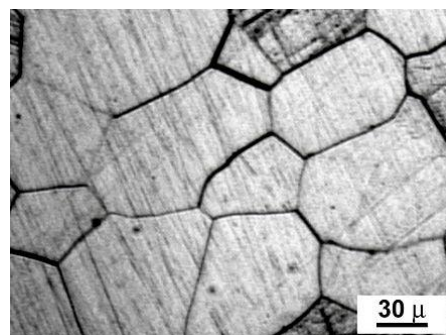
Riešenie: Materiály môžeme z hľadiska usporiadania rozdeliť na monokryštalické, polykryštalické a amorfné. Železo, ako kovový materiál má typicky polykryštalickú štruktúru tvorenú zrnami (zjednodušene si možno každé zrno predstaviť ako „monokryštal“ náhodne usporiadaný v priestore). Veľkosť zŕn je závislá od spracovania (napr. pomalé/rýchle chladnutie). Od veľkosti a charakteru zŕn závisí mnoho fyzikálnych vlastností materiálu a okrem iného súvisí aj s magnetickými vlastnosťami. Pre železo je možno približne určiť magnetickú koercivitu podľa vzťahu $H_C = 1,83 + \frac{4,14}{\sqrt{S}}$, kde S predstavuje plochu zrna v dvojrozmernom modeli polykryštalického materiálu. Veľkosť zŕn môžeme odhadnúť cez ich plochu:

$$\sqrt{S} = \frac{4,14}{71,62 - 1,83} = 0,0593 \quad \text{z toho } S = 0,0035 \text{ mm}^2$$

Z rovnice rovnako vyplýva, že pri zväčšení zŕn dôjde k zníženiu koercitivity železa.



Obr. 3.9 2D model polykryštalického materiálu



Obr. 3.10 Výbrus reálneho materiálu s polykryštalickou štruktúrou

3.4 Neriešené príklady

Príklad 3.6 Vypočítajte magnetický moment dipólu, keď magnetické množstvá jeho pólů sú $2 \cdot 10^{-4}$ Wb a vzdialenosť medzi pólmi je $5 \cdot 10^{-3}$ m.

$$[\mu_{MC} = 10^{-6} \text{ Wbm}]$$

Príklad 3.7 Vypočítajte indukovaný magnetický moment v atóme vodíka v základnom energetickom stave za pôsobenia magnetického poľa intenzity 100 A/m.

$$[\mu'_{mA} = 2,481 \cdot 10^{-33} \text{ Am}^2]$$

Príklad 3.8 Na paramagnetickú sústavu spinov pôsobí homogénne magnetické pole intenzity 10^6 A/m. Vypočítajte priemernú hodnotu magnetického momentu spinu v smere magnetického poľa pri teplote 300 K a teplote kvapalného hélia, t. j. 4,15 K. Vyjadrite v Bohrových magnetónoch.

$$[T = 300 \text{ K: } \bar{\mu}_{mA} = 2,814 \cdot 10^{-3} \mu_B; T = 4,15 \text{ K: } \bar{\mu}_{mA} = 0,2034 \mu_B]$$

Príklad 3.9 Vypočítajte magnetickú indukciu v prostredí, ak je jeho magnetická polarizácia $3 \cdot 10^{-6}$ T a pôsobí vonkajšie magnetické pole intenzity 10 A/m. Zároveň vypočítajte magnetickú susceptibilitu a relatívnu permeabilitu daného prostredia.

$$[B = 1,556 \cdot 10^{-5} \text{ T}; \mu_r = 1,239; \kappa_m = 0,239]$$

Príklad 3.10 Magnetická susceptibilita germánia je $-8 \cdot 10^{-6}$. Vypočítajte magnetickú indukciu v germánii, ak naň pôsobí magnetické pole intenzity 10^5 A/m.

$$[B = 0,1256 \text{ T}]$$

Príklad 3.11 Vypočítajte magnetickú indukciu, magnetizáciu a magnetickú polarizáciu vzorky nióbu umiestnenej v magnetickom poli intenzity $5 \cdot 10^6$ A/m. Magnetická susceptibilita nióbu pri teplote 20°C je $2,9 \cdot 10^{-5}$. Aká je zmena magnetickej indukcie oproti vákuu ?

$$[B = 6,284 \text{ T}; \Delta B = -4,398 \cdot 10^{-5} \text{ T}; J_m = 1,822 \cdot 10^{-4} \text{ T}; M_m = 1,45 \cdot 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Príklad 3.12 Odhadnite maximálnu hodnotu relatívnej permeability feromagnetika, ak jeho remanentná indukcia $B_r = 1,55$ T a koercitívna sila $H_c = 80$ A/m.

$$[\mu_r = 7,71 \cdot 10^3]$$

4. Elektroizolačné materiály

4.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom

Z hľadiska pásmovej teórie tuhých látok možno izolanty charakterizovať ako látky s plne obsadeným valenčným pásmom ΔW_v .

Šírka zakázaného pásma ΔW_z izolantov je viac ako 3 eV, pričom vodivostné pásmo ΔW_c je prázdne.

Elektricky viazané náboje môžu byť v molekulách rôzne usporiadané, a teda môžu tvoriť:

a) nepolárne molekuly (neutrálne) so symetrickou stavbou. Chemické väzby sú kovalentné, bez dipólového momentu. Pôsobením vonkajšieho poľa sa symetria nábojov v molekule poruší a nepolárna molekula vytvorí elektrický dipól. Vzniknutý elektrický moment nazývame **indukovaný dipólový moment**.

b) polárne molekuly (dipólové) s nesymetrickou stavbou a **trvalým** momentom.

Dipólový moment μ_0 predstavuje vektor orientovaný v smere spojnic ťažísk oboch nábojov, pričom smeruje od záporného náboja ku kladnému:

$$\mu = q \cdot d \quad [C \cdot m] \quad (4.1)$$

kde

q je veľkosť náboja [C],

d je vzájomná vzdialenosť posunutých nábojov [m].

Indukovaný dipólový moment je daný vzťahom:

$$\mu = \alpha \cdot E \quad [C \cdot m] \quad (4.2)$$

kde

α je polarizovateľnosť [F.m²],

E je intenzita elektrického poľa [V.m⁻¹].

4.2 Polarizácia dielektrík

Pohyb viazaných elektrických nábojov v izolantoch účinkom elektrického poľa, vysunutie týchto nábojov z ich rovnovážnych polôh na ohraničenú malú vzdialenosť a orientácia dipólových molekúl v smere pôsobiaceho poľa sa nazýva **polarizácia dielektrík**.

Základnou fyzikálnou vlastnosťou dielektrika je jeho elektrická **polarizovateľnosť**, čiže miera deformability vplyvom elektrického poľa:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \kappa \bar{E} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (4.3)$$

kde

P je dielektrická polarizácia [$C \cdot m^{-2}$],

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita vákua,

κ je dielektrická susceptibilita,

E [$V \cdot m^{-1}$] je intenzita elektrického poľa.

Dielektrická susceptibilita sa dá vyjadriť vzťahom:

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 \quad (4.4)$$

kde ε_r je relatívna permitivita dielektrika.

Elektrónová polarizácia je pružné vychýlenie elektrónov, ktoré sa vyskytuje vo všetkých izolačných materiáloch.

Clausius – Mosottiho rovnica je daná vzťahom:

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n \cdot \alpha_e}{3\varepsilon_0} = p \quad (4.5)$$

kde p je molová polarizácia (polarizácia na jednotkové látkové množstvo),

n je koncentrácia častíc.

4.3 Relatívna permitivita

Relatívna permitivita ε_r je jednou zo základných materiálových charakteristík dielektrík a izolantov. Je mierou polarizácie dielektrika. Podľa Coulombovho zákona vyjadruje relatívna permitivita vplyv prostredia na veľkosť sily pôsobiacej medzi nábojmi, ktoré sa nachádzajú v určitej vzdialenosti r :

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \quad [N] \quad (4.6)$$

kde F [N] je veľkosť sily medzi nábojmi Q_1 a Q_2 [C].

Z uvedeného vzťahu je zrejmé, že relatívna permitivita udáva, koľkokrát je sila pôsobiaca na náboj v danom prostredí menšia ako sila pôsobiaca na ten istý náboj vo vákuu.

Relatívnu permitivitu možno definovať aj pomocou vzťahu medzi elektrickou indukciou D a intenzitou elektrického poľa E :

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (4.7)$$

Najvhodnejším spôsobom definovania relatívnej permitivity je na základe súvislosti s kapacitou kondenzátora ako pomer kapacity kondenzátora, ktorého elektródy sú v priestore úplne vyplnenom príslušným dielektrikom a kapacity rovnako usporiadaných elektród vo vákuu, t.j.:

$$\varepsilon_r = \frac{Q_x}{Q_0} = \frac{C_x}{C_0} \quad (4.8)$$

kde Q_x [C] je náboj a C_x [F] je kapacita na doskách kondenzátora,

Q_0 náboj a C_0 kapacita na doskách toho istého kondenzátora, ak je medzi nimi vákuum.

Tento vzťah umožňuje určiť ε_r pomocou ľahko merateľnej veličiny – kapacity. Relatívnu permitivitu ε_r ovplyvňuje predovšetkým charakter polarizačných procesov, teplota a frekvencia.

4.4 Náboj a jeho plošná hustota

Ak pripojíme napätie U na vákuový kondenzátor s kapacitou C_0 , tvorený systémom elektród vo vákuu, pritečie na elektródy náboj $+Q_0$, resp. $-Q_0$, ktorého veľkosť je:

$$Q_0 = C_0 U \quad [C] \quad (4.9)$$

kde Q_0 je náboj na elektródach [C],

C_0 je kapacita kondenzátora [F],

U je elektrické napätie [V].

Medzi elektródami sa vytvorí elektrické pole intenzity E :

$$E = \frac{U}{d} \quad [V \cdot m^{-1}] \quad (4.10)$$

kde E je intenzita elektrického poľa [$V \cdot m^{-1}$],

d je vzdialenosť elektród [m].

Plošná hustota voľného náboja:

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{S} \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (4.11)$$

kde S [m^2] je plocha elektród kondenzátora.

Plošná hustota náboja je rovná elektrickej indukcii D [$C \cdot m^{-2}$], t.j.:

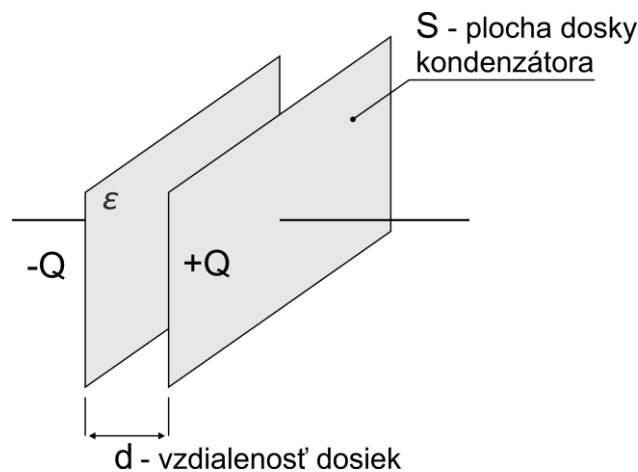
$$\sigma_0 = D_0 = \varepsilon_0 E \quad [C \cdot m^{-2}] \quad (4.12)$$

Ak vsunieme medzi elektródy dielektrikum, pritečie zo zdroja na elektródy ďalší náboj Q_p (viazaný náboj), ktorý kompenzuje náboj na povrchu dielektrika.

Pritečenie ďalšieho náboja na elektródy po vložení dielektrika znamená, že sa zväčšila kapacita kondenzátora na:

$$C = \frac{Q_0 + Q_p}{U} \quad [F] \quad (4.13)$$

kde Q_0 je voľný a Q_p je viazaný náboj [C].



Obr. 4.1 Schematické zobrazenie doskového kondenzátora s dielektrikom

Vzťah pre výpočet kapacity doskového kondenzátora s vloženým dielektrikom je:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad [F] \quad (4.14)$$

kde $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita vákua,

ε_r je relatívna permitivita,

S [m^2] je plocha elektród,

d [m] je vzdialenosť elektród.

Energia kondenzátora sa vypočíta podľa vzťahu:

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} \quad [J] \quad (4.15)$$

kde Q [C] je náboj,

U [V] je napätie,

C [F] je kapacita kondenzátora.

4.5 Elektrická vodivosť

Vodivosť (konduktivita) charakterizuje usporiadaný pohyb elektrických nábojov v látke, ak na ňu pôsobí vonkajšie elektrické pole. Vnútoraná konduktivita je daná koncentráciou voľných nosičov náboja n [m^{-3}], veľkosťou náboja $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C a pohyblivosťou u [$m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$] podľa vzťahu:

$$\gamma = neu \quad [S \cdot m^{-1}] \quad (4.16)$$

Hodnota konduktivity γ reálnych izolantov je menšia ako 10^{-8} S.m⁻¹.

4.6 Riešené príklady

Príklad 4.1: Oxid hlinitý, ktorý sa vyrába anodickou oxidáciou hliníka, sa používa ako dielektrikum hliníkových elektrolytických kondenzátorov. Hrúbka vrstvy oxidu je pritom úmerná formovaciemu napätiu, ktoré je počas výroby priložené na anódu, pričom konštanta úmernosti má hodnotu 10^{-9} m/V. Vypočítajte kapacitu elektrolytického kondenzátora tvoreného pásom hliníka s rozmermi 5×40 cm a oxidovaného po oboch stranách, ak je hodnota formovacieho napätia rovná 500 V a relatívna permitivita oxidovej vrstvy má hodnotu 8 .

Riešenie:

Kapacita doskového kondenzátora sa vypočíta podľa vzťahu:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad [F]$$

kde $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ je permitivita vákua,

ε_r je relatívna permitivita,

S [m²] je plocha elektród,

d [m] je vzdialenosť elektród.

Nakoľko je kondenzátor v tomto príklade zvinutý, vytvoria sa tým dve aktívne plochy, a preto $S = 2 \cdot S_1$. Vzdialenosť dosiek kondenzátora d je daná hrúbkou dielektrika. Dielektrikum sa vytvorí oxidáciou hliníka, pričom hrúbka tejto vrstvy je priamoúmerná veľkosti formovacieho napätia U a konštanté úmernosti k podľa vzťahu $d = k \cdot U$.

Zahrnutím uvedených skutočností je kapacita elektrolytického kondenzátora:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2 \cdot S_1}{k \cdot U} \quad [F]$$

Po číselnom dosadení do tohto vzťahu dostávame:

$$C = 8 \times 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{2 \times 0,05 \times 0,4}{1 \cdot 10^{-9} \times 500} = 5,666 \cdot 10^{-6} F = 5,666 \mu F$$

Príklad 4.2: Na aké napätie sa musí nabiť kondenzátor s kapacitou $2 \mu F$, aby sa na ňom vytvoril taký veľký náboj, ako na kondenzátore s kapacitou $900 pF$, pripojenom na napätie $30 kV$?

Riešenie: Pre náboje na elektródach jedného aj druhého kondenzátora možno písať:

$$Q_1 = C_1 U_1 \quad Q_2 = C_2 U_2 \quad [C]$$

Nakoľko podľa zadania príkladu majú byť náboje oboch kondenzátorov rovnaké, platí vzťah:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2$$

odkiaľ pre hľadané napätie dostávame:

$$U_1 = U_2 \frac{C_2}{C_1} = 30000 \frac{900 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-6}} = 13,5 V$$

Príklad 4.3 Doskový kondenzátor s kapacitou $500 pF$ je nabitý na napätie $5000 V$. Aká práca je potrebná na odstránenie dielektrika s relatívnou permitivitou 5 a ako sa zmení napätie na doskách kondenzátora?

Riešenie: Pretože relatívna permitivita je pomer kapacity medzi kondenzátorom s dielektrikom a bez dielektrika, platí:

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

teda

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad [F]$$

Keďže voľný náboj na elektródach kondenzátora ostáva nezmenený aj po odstránení dielektrika, ani napätie na doskách kondenzátora sa nezmení.

Prácu potrebnú na vytiahnutie dielektrika určíme ako rozdiel energií elektrostatického poľa kondenzátora po a pred vytiahnutím dielektrika:

$$\begin{aligned}
 A = W_0 - W &= \frac{1}{2} C_0 U_0^2 - \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{\epsilon_r} \right) (\epsilon_r U)^2 - \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C U^2 (\epsilon_r - 1) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 10^{-12} \cdot 5000^2 \cdot (5 - 1) = 0,025 \text{ J}
 \end{aligned}$$

Príklad 4.4 Prieskumné vozidlo určené pre operácie na povrchu Marsu je napájané Li-Pol akumulátormi, dobíjanými pomocou solárnych panelov. Aby bolo zachovaná funkcionálnosť akumulátorov, musia byť udržiavané na teplote vyššej ako -20°C . Aký je potrebný výkon vyhrievacích článkov temperujúcich akumulátorovú schránku, ak táto má vonkajšie rozmery $20 \times 30 \times 10$ cm a tepelnú izoláciu tvorí 5 cm vrstva aerogelu s tepelnou vodivosťou $0,015\text{--}0,020 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Minimálna teplota počas marsovskej noci je -90°C . Aké množstvo energie bude spotrebované na temperovanie článkov, ak priemerná teplota počas noci je -63°C ? Pozn. Marsovský deň trvá cca 25 hodín.

Riešenie: Množstvo tepla unikajúceho do okolia sa vypočíta podľa vzťahu:

$$Q_T = \lambda_T \frac{S}{h} \Delta T$$

kde S je plocha ktorou teplo prechádza,

h je hrúbka materiálu,

ΔT je rozdiel teplôt.

V našom prípade je teda celkový povrch akumulátorovej schránky $2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 2 \cdot (0,2 + 0,3) \cdot 0,1 = 0,22 \text{ m}^2$. Rozdiel teplôt vypočítame pre najhoršiu možnú kombináciu, t.j. vonkajšiu teplotu -90°C , pretože vtedy bude tepelný tok najväčší, teda aj potrebný výkon na ohrev bude najvyšší.

$$\Delta T = (-20) - (-90) = 70^\circ\text{C}$$

Potrebný tepelný výkon vyhrievacích článkov bude teda:

$$P = 0,02 \frac{0,22}{0,05} 70 = 6,16 \text{ W}$$

V praxi bude mať výhrevný článok vyšší výkon a bude riadený termostatom.

Spotrebované množstvo energie je možné vypočítať z priemernej teploty a dĺžky noci. Priemerný rozdiel teplôt bude:

$$\Delta T = (-20) - (-63) = 43^\circ\text{C}$$

čomu zodpovedá priemerný výkon:

$$P = 0,02 \frac{0,22}{0,05} 43 = 3,784 \text{ W}$$

po dobu 12,5 hodiny, t.j. $3,784 \times 12,5 = 47,3$ Wh. To je kapacita akumulátorov, ktorú je potrebné rezervovať, aby sa systém udržal cez noc na prevádzkovej teplote.

Príklad 4.5 Procesor na matičnej doske počítača je od pamäťového modulu vzdialený približne 5 cm. Vzhľadom na topológiu dosky plošných spojov (DPS) je celková dĺžka prívodov 15 cm. Určte, koľko dátových slov sa nachádza „na ceste“, ak taktovacia frekvencia pamäti je 1 GHz a relatívna permitivita materiálu DPS je 4,5.

Riešenie: Pre frekvencie nad 100 MHz predstavuje elektrický signál elektromagnetickú vlnu, ktorá sa nešíri po vodiči, ale v jeho okolí. V prípade DPS je vytvorený vlnovod medzi signálovou cestou a zemiacou vrstvou, teda signál sa šíri materiálom DPS. Rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny sa z Maxwellovej teórie elektromagnetického poľa dá vypočítať podľa vzťahu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Pre vákuum teda platí:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Pre iný materiál bude platiť:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Pre väčšinu technických materiálov môžeme povedať, že:

$$\mu_r = 1$$

Rýchlosť šírenia teda bude:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

čo je možné upraviť na:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Rýchlosť šírenia signálu „na DPS“ s relatívnou permitivitou 4,5 teda bude:

$$v = \frac{c}{\sqrt{4,5}} = 1,413 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vlnová dĺžka signálu je teda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,413 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^9} = 0,1413 \text{ m}$$

Keďže celková dĺžka vedenia od procesora k pamäťovému modulu je 15 cm, „na ceste“ sa nachádza:

$$\frac{15}{14,13} = 1,06 \text{ dátového slova}$$

To znamená, že pamäťový modul dostáva požiadavku na čítanie o približne jeden pracovný takt neskôr a rovnako prečítané dáta sa k procesoru dostanú s „jednotaktovým“ oneskorením. Keďže vlnová dĺžka signálu je prakticky rovnaká, ako dĺžka vedenia, je potrebné, aby elektrická dĺžka spojov zo všetkých vývodov procesora bola rovnaká. Preto sú kratšie spoje umelo predĺžované meandrami.

Príklad 4.6 Vodoznak nádrže je tvorený 1 m dlhou polyetylénovou rúrkou štvorcového prierezu 10x10 mm so stenou hrubou 2 mm. Na vonkajších stenách rúrky sú vytvorené vodivé plochy široké 5 mm. Odhadnite kapacitu pri plnej a prázdnej nádrži. Aká zmena kapacity pripadá na 1 cm? Relatívna permitivita polyetylénu je 2,4 a vody 80.

Riešenie: Vodivé plochy vodoznaku tvoria kondenzátor s vrstveným dielektrikom. Plocha elektród je 5 mm x 1m, t.j. $0,005 \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Prvé dielektrikum tvorí plast s hrúbkou 2x2 mm t.j. $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, druhým dielektrikom hrubým $10^{-4} = 6 \text{ mm}$ je v prípade prázdnej nádrže vzduch, v prípade plnej nádrže tvorí dielektrikum voda. Výslednú kapacitu môžeme vypočítať ako sériové zapojenie kondenzátorov.

Kapacita kondenzátora tvoreného plášťom vodoznaku je:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2,4 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 2,656 \cdot 10^{-11} = 26,6 \text{ pF}$$

Kapacita vzduchovej medzery je:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} = 7,378 \cdot 10^{-12} = 7,38 \text{ pF}$$

Kapacita medzery naplnenej vodou je:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} = 5,9 \cdot 10^{-10} = 590 \text{ pF}$$

Výsledná kapacita v prípade prázdnej nádrže bude:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{26,6 \times 7,38}{26,6 + 7,38} \cdot 10^{-12} = 5,777 \cdot 10^{-12} = 5,78 \text{ pF}$$

V prípade plnej nádrže:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{26,6 \cdot 590}{26,6 + 590} \cdot 10^{-12} = 25,45 \cdot 10^{-12} = 25,5 \text{ pF}$$

Rozdiel kapacity medzi plnou a prázdnu nádržou je $25,5 - 5,78 = 19,72 \text{ pF}$.

Citlivosť snímača je $19,72 \text{ pF}/100 = 0,197 \text{ pF}/\text{cm}$.

Príklad 4.7 Záložný zdroj napájajúci poplašné zariadenie tvorí superkondenzátor s kapacitou 2,2 F, ktorý je priebežne nabíjaný na 5 V. Stály odber zariadenia je 0,1 mA, pričom činnosť je indikovaná krátkymi zábleskami LED diódy. Záblesk trvá 0,2 s a prúd tečúci cez LED diódu je 50 mA. Perióda opakovania zábleskov je 3 s. Ako dlho po výpadku napájania bude zariadenie fungovať, ak minimálne napájacie napätie pre správnu funkciu je 3 V?

Riešenie: V nabitom kondenzátore je uskladnený náboj:

$$Q = C \cdot U = 2,2 \cdot 5 = 11 \text{ C}$$

Využitelný náboj je menší, daný potrebou minimálneho napájacieho napätia. Teda reálne využitelný náboj bude:

$$Q = C(U - U_{min}) = 2,2(5 - 3) = 4,4 \text{ C}$$

Po spotrebovaní tohto náboja sa napätie na kondenzátore dostane pod prípustnú hodnotu.

Spotreba zariadenia sa skladá z dvoch zložiek. Stály odber je 0,1 mA, čomu zodpovedá úbytok náboja ($Q=I \cdot t$) 0,1 mC/s. Odber svetelnej indikácie je 50 mA po dobu 0,2 s.

$$Q = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 10 \text{ mC}/3 \text{ s}$$

Celkový odber je teda $3 \cdot 0,1 + 10 = 10,3 \text{ mC}/3 \text{ s}$

Využitelný náboj bude teda spotrebovaný za:

$$\frac{4,4}{10,3 \cdot 10^{-3}} = 427,18 \text{ cyklov}$$

Teda zariadenie bude funkčné približne 1281,5 s, čo predstavuje 21,3 minúty.

Príklad 4.8 Vypočítajte prierazné napätie zapuzdreného kondenzátora s kruhovými elektródami priemeru 2 cm vzdialenými 0,3 mm od seba v prípade plnenia kondenzátorového puzdra:

- a) vzduchom
- b) plynom SF₆

Pozn.: Elektrická pevnosť (E_p) suchého vzduchu je $2,4 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$, SF₆ má elektrickú pevnosť približne 2,5 krát vyššiu.

Riešenie:

a) Vzduch:

$$U = E_p \cdot d = 2,4 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} = 720 \text{ V}$$

b) Plyn SF₆

$$U = 720 \cdot 2,5 = 1800 \text{ V}$$

Príklad 4.9 Relatívna permitivita transformátorového oleja pri teplote 22°C je 2,1. Určte relatívnu permitivitu pri teplote 90°C a -20°C, ak koeficient teplotnej rozťažnosti je 0.00070.

Riešenie: Pri zmene teploty o 68°C (90-22=68) dôjde následkom teplotnej rozťažnosti k $1+0,0007 \cdot 68=1,0476$ násobnému nárastu objemu. Teda v pracovnom objeme dôjde k poklesu počtu molekúl na 95,5% pôvodnej koncentrácie ($1,0476^{-1}$), čo spôsobí, že relatívna permitivita klesne na hodnotu 2,0055.

Pri poklese teploty na -20°C objem kvapaliny poklesne na 97% pôvodného objemu, teda počet molekúl v pracovnom objeme sa zvýši 1,03 krát. Relatívna permitivita potom bude 2,164.

$$(-20)-22=-42^\circ\text{C}$$

$$1+(-42) \cdot 0,0007=0,9706$$

$$0,9706^{-1}=1,03$$

$$1,03 \cdot 2,1=2,1636$$

4.7 Neriešené príklady

Príklad 4.10 Intenzita elektrického poľa medzi elektródami vákuového kondenzátora je $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Určte veľkosť náboja Q na elektródach tohto kondenzátora, ak rozmery elektród sú $6 \times 10 \text{ cm}$. Vplyv okrajového elektrického poľa pri výpočte zanedbajte.

$$[Q=5,3124 \cdot 10^{-10} \text{ C}]$$

Príklad 4.11 Kapacita kondenzátora s dielektrikom z rulitu s relatívnou permitivitou 100 je $1 \mu\text{F}$. Ku kondenzátoru je priložené jednosmerné napätie 500 V. Vypočítajte energiu nabitého kondenzátora a jej prírastok oproti vákuovému kondenzátoru s rovnakými rozmermi.

$$[W=0,125 \text{ J}; \Delta W=0,124 \text{ J}]$$

Príklad 4.12 Vypočítajte kapacitu doskového kondenzátora s rozmermi dosiek $15 \times 18 \text{ cm}$, medzi ktoré je vložená drážková izolácia tvorená $0,3 \text{ mm}$ hrubou elektrotechnickou lepenkou s relatívnou permitivitou 2,6 a $0,04 \text{ mm}$ hrubou polymérnou fóliou s relatívnou permitivitou 3,8. Vplyv okrajových elektrických polí zanedbajte.

$$[C=1,89 \text{ nF}]$$

Príklad 4.13 Doskový vákuový kondenzátor s rozmermi $6 \times 10 \text{ cm}$, ktorého elektródy sú od seba vzdialené 1 mm je po nabití na napätie 1 kV odpojený od vonkajšieho zdroja. Vypočítajte zmenu intenzity elektrického poľa, zmenu elektrickej indukcie a zmenu kapacity kondenzátora, ak sa medzi dosky kondenzátora vloží sľudová doštička s relatívnou permitivitou 5,4. Aký je pomer hustoty voľného a viazaného náboja na elektródach?

$$[E_0=10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; E=1,851 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; D=D_0=8,854 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; C=286,8 \text{ pF}; C_0=53,12 \text{ pF}; (\sigma_0/\sigma_p)=0,227]$$

Príklad 4.14 Na elektródy doskového kondenzátora s rozmermi $30 \times 20 \text{ cm}$ vzdialenými od seba 4 mm , je priložené napätie 1000 V . Určte intenzitu elektrického poľa, elektrickú indukciu a plošné hustoty voľného a viazaného náboja na elektródach, ak dielektrikum tvorí:

a) vákuum,

b) penový polystyrén s relatívnou permitivitou 1,45.

$$[a) E_0=25 \cdot 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; D_0=2,2135 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; \sigma_0=2,2135 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}]$$

$$[b) E=25 \cdot 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; D=3,21 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; \sigma_p=9,96075 \cdot 10^{-7} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}]$$

Príklad 4.15 Majme doskový vákuový kondenzátor s elektródami s rozmermi $12 \times 10 \text{ cm}$ vzdialenými $0,5 \text{ mm}$ pripojený na napätie 1500 V . Určte, ako sa zmení intenzita elektrického poľa, elektrická indukčnosť a kapacita, ak sa medzi elektródy vloží sľudová doštička s relatívnou permitivitou 5,4 pri:

a) odpojenom napätí,

b) nezmenenom napätí.

$$[a) E_0=3 \cdot 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; E=5,55 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; D_0=D=2,6562 \cdot 10^{-5} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; C_0=2,125 \cdot 10^{-10} \text{ F}; C=1,196 \cdot 10^{-9} \text{ F}]$$

$$[b) E=E_0=3 \cdot 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}; D=1,434 \cdot 10^{-4} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; D_0=2,6562 \cdot 10^{-5} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}; C_0=2,125 \cdot 10^{-10} \text{ F}; C=1,196 \cdot 10^{-9} \text{ F}]$$

Príklad 4.16 Vypočítajte dipólový moment 1 m^3 polystyrénu s relatívnou permitivitou 2,3, na ktorý pôsobí homogénne jednosmerné elektrické pole o intenzite 10^5 V/m . Ako sa zmení dipólový moment, ak sa zmení intenzita elektrického poľa na hodnotu $5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

$$[E=10^5 \text{ V/m} \rightarrow \mu_c=1,151 \cdot 10^{-6} \text{ C.m}; E=5 \cdot 10^6 \text{ V/m} \rightarrow \mu_c=5,755 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}]$$

Príklad 4.17 Elektrolytický kondenzátor tvorený oxidovou hliníkovou doštičkou s aktívnym povrchom 400 cm^2 má kapacitu $8 \mu\text{F}$. Napätie medzi doštičkou a elektrolytom s relatívnou permitivitou 8 je 10 V . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a celkový dipólový moment indukovaný v oxidovej vrstve.

$$[E=2,823 \cdot 10^7 \text{ V.m}^{-1}; \mu_c=2,479 \cdot 10^{-11} \text{ C.m}]$$

Príklad 4.18 Vypočítajte indukovaný dipólový moment atómu vodíka v elektrickom poli s intenzitou 10^3 V/m . Elektrónová polarizovateľnosť atómu vodíka je $0,737 \cdot 10^{-40} \text{ Fm}^2$.

$$[\mu=7,37 \cdot 10^{-38} \text{ C.m}]$$

Príklad 4.19 Elektrónová polarizovateľnosť atómu vodíka je $0,737 \cdot 10^{-40} \text{ Fm}^2$ a kryptónu $2,18 \cdot 10^{-40} \text{ Fm}^2$. Aká je vzdialenosť ťažísk nábojov a indukovaný dipólový moment pre tieto atómy v elektrickom poli s intenzitou 500 Vm^{-1} .

$$[\mu_H=3,685 \cdot 10^{-38} \text{ C.m}; \mu_{Kr}=1,09 \cdot 10^{-37} \text{ C.m}; d_H=2,3 \cdot 10^{-19} \text{ m}; d_{Kr}=1,889 \cdot 10^{-20} \text{ m}]$$

Príklad 4.20 Aký je koeficient elektrónovej polarizovateľnosti atómu argónu, ak relatívna permitivita argónu za normálnych fyzikálnych podmienok je $1,0004342$.

$$[\alpha_e=1,430 \cdot 10^{-40} \text{ F.m}^2]$$

Príklad 4.21 Koeficient elektrónovej polarizovateľnosti atómu argónu je $1,43 \cdot 10^{-40} \text{ Fm}^2$. Vypočítajte relatívnu permitivitu argónu za normálnych fyzikálnych podmienok.

$$[\epsilon_r=1,0004342]$$

Príklad 4.22 Vypočítajte molárnu polarizovateľnosť a index lomu transformátorového oleja s relatívnou permitivitou 2,16.

$$[P=0,2788 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}; n_D=1,4697]$$

Príklad 4.23 Izolácia v drážke elektrického stroja je tvorená drážkovou lepenkou s hrúbkou $0,35 \text{ mm}$. Vypočítajte merný tepelný tok izoláciou, keď rozdiel teplôt jej strán je $12 \text{ }^\circ\text{C}$, merná tepelná vodivosť je $0,145 \text{ W/K.m}$ a vplyv prechodových tepelných odporov zanedbateľný.

$$[q_T=5 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}]$$

Príklad 4.24 Polárny izolant zložený z dipólových molekúl jedného druhu má pri teplote 20°C relatívnu statickú permitivitu 5,4 a relatívnu optickú permitivitu 2,3. Určte reálnu a imaginárnu časť komplexnej permitivity pri teplote 20°C pri frekvenciách 50 Hz, 100 kHz a 50 MHz, ak relaxačná doba dipólových molekúl je $(\pi/2) \cdot 10^{-5}$ s.

$$[f_1=50 \text{ Hz: } \epsilon'=5,399925, \epsilon''=0,015286; f_2=100 \text{ kHz: } \epsilon'=2,3315, \epsilon''=0,3109039; f_3=50 \text{ MHz: } \epsilon'=2,3, \epsilon''=6,2819 \cdot 10^{-4}]$$

Príklad 4.25 Relatívna statická permitivita polárneho izolantu pri teplote 20°C je 8,2 a relatívna optická permitivita 2,8. Určte reálnu a imaginárnu časť komplexnej permitivity a stratový činiteľ pri teplote 20°C pri frekvenciách 50 Hz, 100 kHz a 50 MHz, ak relaxačná doba dipólových molekúl je $(\pi/2) \cdot 10^{-5}$ s.

$$[f_1=50 \text{ Hz: } \epsilon'=8,199868, \epsilon''=0,02664728; \text{tg}\delta=3,24972 \cdot 10^{-3}]$$

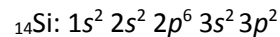
$$[f_2=100 \text{ kHz: } \epsilon'=2,8548729, \epsilon''=0,5415745; \text{tg}\delta=0,1897018]$$

$$[f_3=50 \text{ MHz: } \epsilon'=2,8, \epsilon''=1,0942687 \cdot 10^{-3}; \text{tg}\delta=3,908102 \cdot 10^{-4}]$$

5. Polovodičové materiály

5.1 Stručný teoretický prehľad k príkladom

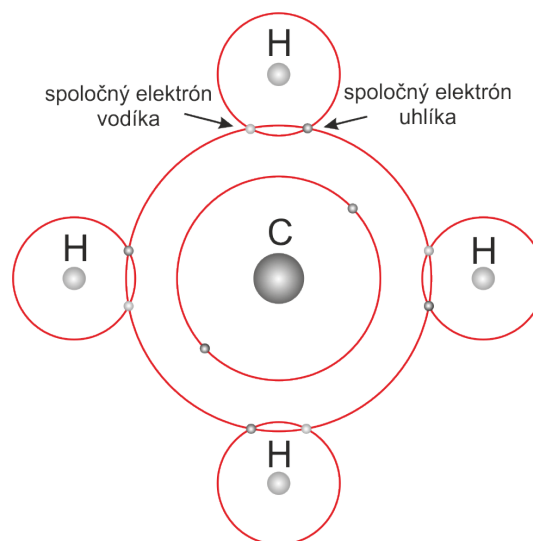
Šírka zakázaného pásma polovodičov je v rozmedzí 1,5 – 3 eV. Pri izbovej teplote sa elektrická vodivosť polovodičov používaných v praxi nachádza v oblasti $10^5 - 10^{-11} \text{ S.m}^{-1}$. Atómy základných polovodičových prvkov **kremíka - Si** a **germánie - Ge** patria do IV. skupiny periodickej sústavy. U kremíka je šírka zakázaného pásma $\Delta W_z = 1,1 \text{ eV}$ a v izolovanom stave má elektrónovú konfiguráciu:



Atómy kremíka i germánie majú v poslednej vrstve obsadené len dva elektróny, mohli by sme teda očakávať mocenstvo 2. V skutočnosti ale jeden elektrón z orbitálu *s* prechádza do orbitálu *p*. V prípade germánie je 28 elektrónov a v prípade kremíka 10 elektrónov pevne viazaných k jadru atómu. Zvyšné 4 elektróny na orbitáloch *s* a *p* patriace k neúplne obsadeným skupinám sa správajú ako valenčné elektróny.

Pre polovodiče je charakteristická **kovalentná** väzba, pri ktorej patria valenčné elektróny súčasne k susedným atómom. V kryštálovej mriežke čistého kremíka a germánie väzbu sprostredkuje elektrónový pár, pričom každý atóm je svojimi 4 valenčnými elektrónmi „zviazaný“ so štyrmi susednými atómami zaujímavými vrcholy pravidelného tetraédra. Usporiadanie atómov kryštálovej mriežky takto vytvára diamantovú štruktúru.

Pretože hustota elektrónov medzi atómami je veľmi vysoká a elektróny sú pevne viazané, ide o izolant. Až pri dostatočne vysokej teplote sa časť väzbových elektrónov uvoľní a tým sa vytvorí **vlastná vodivosť**.



Obr. 5.1 Kovalentná väzba

Koncentrácie elektrónov n_n a dier n_p sú vo vlastnom polovodiči rovnaké a teda musí byť splnená **podmienka neutrality**:

$$n_n = n_p = n_i \quad [m^{-3}] \quad (5.1)$$

kde index i znamená **intrinzickú** (vlastnú) koncentráciu.

Matematicky možno elektrickú vodivosť polovodičov vyjadriť analogicky ako pri kovoch s tým rozdielom, že je potrebné rozoznávať dva druhy nosičov prúdu. Rovnako je potrebné prihliadnuť k špecifickým vlastnostiam pohybu častíc v periodickom potenciáli kryštálovej mriežky z kvantovo-mechanického hľadiska. Elektrón sa z tohto pohľadu v mriežke správa ako keby mal hmotnosť:

$$m^* = \hbar^2 \frac{1}{d^2W/dk^2} \quad (5.2)$$

kde $\hbar = h/2\pi$ je redukovaná Planckova konštanta,

k je vlnový vektor, t.j. veličina udávajúca smer vlny častice ($|k| = k = 2\pi/\lambda$, λ je vlnová dĺžka),

W je energia častice.

Veličina m^* sa nazýva **efektívna hmotnosť** a je závislá na smere pohybu nosičov a na ich energii W .

Pohyblivosť elektrónov u_n a dier u_p bude:

$$u_n = \frac{e\tau_n}{m_n^*} \quad u_p = \frac{e\tau_p}{m_p^*} \quad [m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}] \quad (5.3)$$

kde u_n (u_p) je pohyblivosť elektrónov (dier),

τ_n (τ_p) je relaxačná doba elektrónov (dier),

m_n^* (m_p^*) je efektívna hmotnosť elektrónov (dier).

Pre **elektrické vodivosti** spôsobené elektrónmi σ_n a dierami σ_p platia vzťahy:

$$\sigma_n = en_n u_n \quad \sigma_p = en_p u_p \quad (5.4)$$

S prihliadnutím k podmienke neutrality môžeme konduktivitu vlastného polovodiča určiť vzťahom:

$$\sigma_i = en_i(u_n + u_p) = en_i \left(\frac{\tau_n}{m_n^*} + \frac{\tau_p}{m_p^*} \right) \quad (5.5)$$

Konduktivita polovodičov je závislá od teploty. Pre vlastný polovodič je táto závislosť určená vzťahom:

$$\sigma_i = konst. \exp\left(-\frac{\Delta W_z}{2kT}\right) \quad (5.6)$$

kde ΔW_z je šírka zakázaného pásma,

konst. je konštanta s rozmerom elektrickej vodivosti.

5.2 Fermi Diracova rozdeľovacia funkcia

Elektróny ako elementárne častice patria do skupiny fermiónov, t.j. častíc s polovičným spinom $\pm\frac{1}{2}$. Pravdepodobnosť, že hladina s energiou W je obsadená elektrónom určuje Fermi-Diracova rozdeľovacia funkcia:

$$F(W) = \left[1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{kT}\right)\right]^{-1} \quad (5.7)$$

kde k je Boltzmanova konštanta,

T je absolútna teplota,

W_F je Fermiho hladina definovaná podmienkou, že pravdepodobnosť jej obsadenia je 50%, t.j. $F(W_F) = 0,5$.

Pri teplote absolútnej nuly je Fermiho hladina v kovoch najvyššie obsadenou hladinou.

Pravdepodobnosť, že hladina s energiou W nebude obsadená elektrónom je:

$$1 - F(W) = \left[1 + \exp\left(\frac{W_F - W}{kT}\right)\right]^{-1} \quad (5.8)$$

Ak je energia elektrónov dostatočne vzdialená od Fermiho hladiny, prechádza rozdeľovacia funkcia na exponenciálne pravdepodobnostné rozdelenie podľa Maxwella a Boltzmana tvaru:

$$F(W) = \exp\left(-\frac{W - W_F}{kT}\right) \quad (5.9)$$

Pri rozdielke energií $(W - W_F)$ väčšom ako $3kT$ je chyba Maxwell-Boltzmanovho pravdepodobnostného rozdelenia oproti Fermi-Diracovej rozdeľovacej funkcii menšia ako 5%.

5.3 Koncentrácia nosičov náboja

Ak poznáme hustotu dovolených stavov vo vodivostnom pásme a pravdepodobnosť ich obsadenia elektrónmi, platí pre hustotu elektrónov vzťah:

$$n_n = N_C \exp\left(-\frac{W_C - W_F}{kT}\right) \quad [m^{-3}] \quad (5.10)$$

kde efektívna hustota dovolených stavov vo vodivostnom pásme:

$$N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad [m^{-3}] \quad (5.11)$$

Analogicky pre hustotu dier vo valenčnom pásme:

$$n_p = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{kT}\right) \quad [m^{-3}] \quad (5.12)$$

kde efektívna hustota dovolených stavov vo valenčnom pásme:

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad [m^{-3}] \quad (5.13)$$

Intrinzickú koncentráciu elektrónov a dier v prípade vlastného polovodiča je možné vypočítať podľa vzťahu:

$$n_p = n_n = 2 \left(\frac{2\pi kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} (m_n^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{W_C - W_V}{2kT}\right) \quad [m^{-3}] \quad (5.14)$$

5.4 Fermiho hladina a výstupná práca

Energiu Fermiho hladiny vlastného polovodiča môžeme vypočítať z podmienky elektrickej neutrality (5.1) a z rovníc (5.10) a (5.12). Úpravou dostaneme:

$$W_F = \frac{W_C + W_V}{2} + \frac{1}{2} kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) \quad [J] \quad (5.15)$$

Z rovnice je zrejmé, že pri teplote absolútnej nuly sa Fermiho hladina vlastného polovodiča nachádza v strede zakázaného pásma.

Základnou vlastnosťou Fermiho hladiny je, že hodnota W_F je pre systém v termodynamickej rovnováhe konštantná. To platí aj po styku polovodičových materiálov s opačným typom vodivosti, kedy dochádza k vyrovnaniu nábojov, až kým nie je Fermiho hladina v celom objeme štruktúry rovnaká.

Aby sa uvoľnil elektrón z povrchu pevnej látky, musí mať navyše energiu potrebnú na vykonanie práce proti väzbovým a povrchovým silám. Túto energiu nazývame **výstupná práca** polovodiča a je daná vzťahom:

$$\Phi = \chi + (W_C - W_F) \quad [J] \quad (5.16)$$

kde χ je elektrónová afinita, ktorá vyjadruje mieru snahy atómu prijať do svojho elektronového obalu ďalší elektrón.

Pre prímiesový polovodič platí rovnica:

$$n_n n_p = n_i^2 = konst. \quad (5.17)$$

kde n_i [m^{-3}] je intrinzická koncentrácia.

Je zrejmé, že na rozdiel od vlastného polovodiča teraz neplatí rovnosť.

Uvažujme polovodič typu N, ktorý obsahuje len jeden druh donorov (napr. kremík dotovaný fosforom) s koncentráciou n_D a s prevahou voľných elektrónov ($n_n > n_p$). Ionizáciou sa zvýši koncentrácia elektrónov na úkor dier, takže súčin $n_n n_p = konst.$ Pri izbovej teplote sa ešte neuplatní vlastná vodivosť a pre podmienku elektrickej neutrality môžeme písať:

$$n_n = n_D^+ \quad (5.18)$$

kde n_D^+ je koncentrácia kladne ionizovaných donorov.

Koncentrácia elektrónov postupnou ionizáciou donorov pre nízke teploty je daná vzťahom:

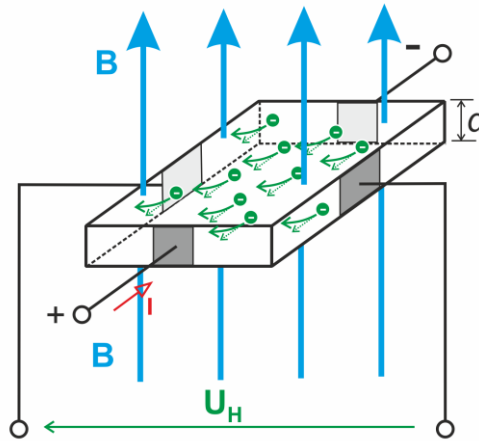
$$n_n = \sqrt{\frac{N_C n_D}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta W_D}{2kT}\right) \quad (5.19)$$

resp.

$$n_n = \sqrt{n_D \left(\frac{(2\pi m_n kT)^{\frac{1}{2}}}{h}\right)^3} \exp\left(-\frac{\Delta W_D}{2kT}\right) \quad (5.20)$$

5.5 Hallov jav

Hallov jav vzniká vo vzorke vodiča alebo polovodiča pri súčasnom pôsobení elektrického a magnetického poľa. Vplyvom magnetického poľa sú nosiče náboja vychýlené zo svojich dráh a na priečných elektródach môžeme namerať Hallovo napätie U_H .



Obr. 5.2 Hallova sonda

V praxi sa najčastejšie používa usporiadanie, pri ktorom je vektor magnetického poľa orientovaný kolmo na smer pretekania prúdu vzorkou polovodiča. Pre prúd platí rovnosť $I = JS = Jhb$ a pre intenzitu elektrického poľa $E_H = U_H/b$. Potom pre Hallovo napätie platí:

$$U_H = R_H \frac{IB}{h} \quad [V] \quad (5.21)$$

kde R_H je Hallova konštanta,

B je vektor magnetickej indukcie,

I je vektor prúdu,

h je hrúbka vzorky.

V prípade polovodiča so zmiešanou vodivosťou platí pre výpočet Hallovej konštanty vzťah:

$$R_H = \frac{A}{e} \frac{n_p u_p^2 - n_n u_n^2}{(n_p u_p + n_n u_n)^2} \quad (5.22)$$

kde n_n a n_p sú koncentrácie elektrónov a dier,

u_n a u_p sú ich pohyblivosti,

A je konštanta závislá od mechanizmu rozptylu voľných nosičov náboja.

Ak v polovodiči prevláda jeden typ náboja, dostávame pre Hallovu konštantu zjednodušené výrazy

pre $n \gg p$ platí:

$$R_H = -\frac{A}{ne} \quad (5.23)$$

pre $p \gg n$ platí:

$$R_H = \frac{A}{ne} \quad (5.24)$$

5.6 PN priechod

PN priechod predstavuje oblasť medzi typom N a P polovodiča so zvýšenou rezistivitou - **hradlová vrstva**. Nevyhnutnou podmienkou je, aby polovodič typu N mal menšiu výstupnú prácu ako polovodič P.

Predpokladajme, že máme vzorku čistého polovodiča, v ktorom je vhodnými prímiesami vytvorená v jednej časti vodivosť N a v druhej vodivosť P.

Pretekaním striedavého prúdu sa PN priechod chová aj ako kondenzátor. Náboj nadifundovaný po oboch stranách PN prechodu tvorí dosky kondenzátora, oblasť zväčšeného odporu medzi nimi jeho dielektrikum. Jeho kapacitu môžeme vyjadriť vzťahom:

$$C = S \sqrt{\frac{e\varepsilon_0\varepsilon_r}{2(U_d \pm U)} \frac{n_D n_A}{n_A + n_D}} \quad [F] \quad (5.25)$$

kde S [m^2] je prierez P-N priechodu,

n_A [m^{-3}] je koncentrácia akceptorov,

n_D [m^{-3}] je koncentrácia donorov,

U_d [V] je difúzne napätie,

U [V] je priložené napätie.

Znamienko sa mení v závislosti od priloženého napätia U . V priamom smere je znamienko kladné (+) a v závernom smere záporné (-).

Šírku PN priechodu možno určiť zo vzťahu:

$$h_{p,n} = \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon_r(U_d - D) \frac{n_D + n_A}{en_D n_A}} \quad [m] \quad (5.26)$$

5.7 Difúzia elektrónov a dier

V polovodičoch môže vzniknúť nerovnaké rozloženie koncentrácie elektrónov a dier. Tento jav môže byť dôsledkom nerovnorodého znečistenia polovodiča, zohriatím jednej časti polovodiča alebo dotykom s inými látkami. To má za následok, že voľné náboje začnú prenikať z miest s vyššou koncentráciou do miest s nižšou koncentráciou. Tento jav sa nazýva **difúzia** a je popísaný dvoma Fickovými zákonmi:

Prvý Fickov zákon vyjadruje vzťah medzi hustotou difúzneho toku a gradientom koncentrácie dn/dx . Ak uvažujeme difúziu častíc len v smere osi x , prvý Fickov zákon možno matematicky popísať vzťahom:

$$j = -D \frac{dn}{dx} \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (5.27)$$

kde j [$A \cdot m^{-2}$] je hustota difundujúcich častíc,

D je koeficient difúzie, ktorý súvisí s pohyblivosťou nábojov.

Koeficient difúzie D je vyjadrený **Einsteinovým** vzťahom:

$$D = u \frac{kT}{e} \quad [m^2 \cdot s^{-1}] \quad (5.28)$$

kde u [$m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$] je pohyblivosť nosičov náboja,

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ [$J \cdot K^{-1}$] je Boltzmannova konštanta.

Z Einsteinovej rovnice možno určiť **difúzne napätie**:

$$U_d = E_d d \quad [V] \quad (5.29)$$

kde E_d [$V \cdot m^{-1}$] je intenzita elektrického poľa,

d [m] je šírka PN priechodu

Druhý Fickov zákon (zákon zachovania počtu častíc) určuje rozloženie nadifundovaných častíc s koncentráciou n v čase t v jednotlivých bodoch priestoru, teda koncentračný alebo difúzny profil. Ak uvažujeme len os x , je daný vzťahom:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (5.30)$$

Prúd nosičov náboja, ktorý vznikne difúziou, označujeme ako **difúzny prúd**. Ak uvažujeme dva druhy nosičov náboja, určujeme hustotu difúzneho prúdu pre elektróny aj diery. Hustota difúzneho prúdu elektrónov je daná:

$$J_{(n)} = \frac{qD_n n_{on(p)}}{L_n} \left(\exp \frac{qU}{kT} - 1 \right) \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (5.31)$$

Hustota difúzneho prúdu dier:

$$J_{(p)} = \frac{qD_p n_{op(n)}}{L_p} \left(\exp \frac{qU}{kT} - 1 \right) \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (5.32)$$

kde L je **difúzna vzdialenosť**, ktorá je definovaná ako stredná vzdialenosť, na ktorú elektrón difunduje za **dobu života** τ a platí:

$$L = \sqrt{D\tau} = \sqrt{\frac{ukT}{e} \tau} \quad [m] \quad (5.33)$$

Celková hustota prúdu je potom daná súčtom hustoty difúzneho prúdu elektrónov a dier, t.j.:

$$J_{(n,p)} = J_{(n)} + J_{(p)} = q \left(\frac{D_n n_{on(p)}}{L_n} + \frac{D_p n_{op(n)}}{L_p} \right) \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right) \quad [A \cdot m^{-2}] \quad (5.34)$$

5.8 Riešené príklady

Príklad 5.1: Vypočítajte koncentráciu elektrónov a dier v kremíku s vlastnou vodivosťou pri teplotách 20°C a 100°C za predpokladu, že efektívna hmotnosť elektrónov a dier je zhodná s hmotnosťou elektrónov. Šírka zakázaného pásma kremíka je $1,21\text{eV}$.

Riešenie: Ak platí uvedený predpoklad, koncentráciu voľných elektrónov a dier vo vlastnom polovodiči možno vypočítať pomocou nasledujúceho vzťahu. Nakoľko pri všetkých výpočtoch musíme používať základné jednotky sústavy SI, je potrebné hodnoty teplôt a energie v zadaní príkladu prepočítať.

$$\Delta W_z = 1,21 \text{ eV} = 1,938 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}, \quad 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$$

Koncentrácia elektrónov a dier pre teplotu 20°C sa vypočíta nasledovne:

$$\begin{aligned} n_n = n_p &= 2 \sqrt{\left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^3} \exp\left(-\frac{\Delta W_z}{2kT}\right) = \\ &= 2 \sqrt{\left[\frac{2\pi \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{(6,624 \cdot 10^{-34})^2} \right]^3} \cdot \exp\left(-\frac{1,938 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}\right) = 9,405 \cdot 10^{14} \quad [m^{-3}] \end{aligned}$$

pre 100°C je koncentrácia rovná $2,313 \cdot 10^{17} m^{-3}$.

Príklad 5.2: Vychádzajte z Fermiho rozdeľovacej funkcie a vypočítajte v kremíku pri teplote 300 K pravdepodobnosť obsadenia energetických hladín elektrónmi na spodnej hranici vodivostného pásma, keď Fermiho hladina sa nachádza v strede zakázaného pásma polovodiča. Šírka zakázaného pásma kremíka je 1,21 eV.

Riešenie: Pravdepodobnosť $P_{(n)}$ obsadenia energetických hladín v polovodičoch elektrónmi je určená Fermiho rozdeľovacou funkciou:

$$P_{(W)F} = \frac{1}{1 + e^{\frac{W-W_F}{kT}}}$$

pre daný prípad:

$$P_{(n)F} = \frac{1}{1 + e^{\frac{W_c-W_F}{kT}}}$$

Keďže Fermiho hladina sa nachádza v strede zakázaného pásma:

$$P_{(n)F} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta W_z}{2kT}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1,21 \cdot e}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}}} = 6,804 \cdot 10^{-11}$$

Príklad 5.3 Magnet v obrazovke notebooku produkuje magnetické pole s indukciou 0,9 T. Hallova sonda umiestnená v spodnom kryte notebooku je tvorená polovodičom s rozmerom 1 x 2 mm a hrúbkou 0,2 mm. Predpokladajme, že týmto senzorom preteká prúd 50 mA a magnetické pole pri zatvorenom notebooku pôsobí kolmo na jeho širšiu stranu. Pre vypnutie displeja je potrebná hodnota hallovho napätia aspoň 60 mV. Zistite, či v takejto konfigurácii bude senzor pracovať správne.

Teoretický rozbor a riešenie:

Hallovoj jav

Už v roku 1879 objavil americký fyzik **Edwin Herbert Hall**, že magnetické pole kolmé na elektrický prúd spôsobuje jav, že nosiče elektrického prúdu sú vo vodiči vychýľované z priameho smeru na okraje vodiča. Príčinou tohto vychýlenia je elektromagnetická Lorentzová sila. Medzi okrajmi vodičmi sa objaví rozdiel potenciálov teda napätie.

Hallova sonda

je súčiastka, ktorá sa používa na meranie magnetického poľa. Je tvorená úzkou polovodičovou doštičkou ktorou prechádza prúd. Pri vložení tejto doštičky do magnetického poľa ňou prechádza indukčný tok a ten preskupuje náboje v doštičke na jednu stranu [2]. Tak na Hallovom článku vzniká

napätie. Toto napätie je možné vypočítať pomocou vzťahu (5.1). Hallovu sondu možno použiť na detekciu magnetického poľa alebo na nepriame meranie elektrického prúdu kedy prúd pretekajúci vodičom tvorí magnetické pole, ktorého veľkosť je priamo úmerná veľkosti pretekajúceho prúdu. Princíp funkčnosti Hallovej sondy je zobrazený na Obr. 5.3.

$$U_h = R_h \frac{I \cdot B}{d} \text{ [V]}$$

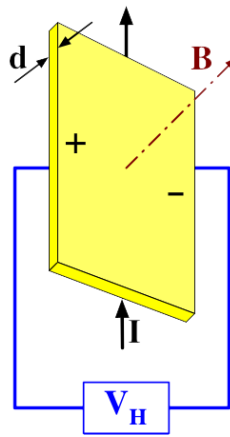
kde

U_h je veľkosť Halloveho napätia $R_h = 3.66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{A}^{-1} \text{s}^{-1}$,

I je elektrický prúd,

B je hodnota indukcie magnetického poľa,

d je hrúbka materiálu sondy.



Obr. 5.3 Princíp Hallovej sondy

Po dosadení do vzťahu pre výpočet Halloveho napätia dostaneme:

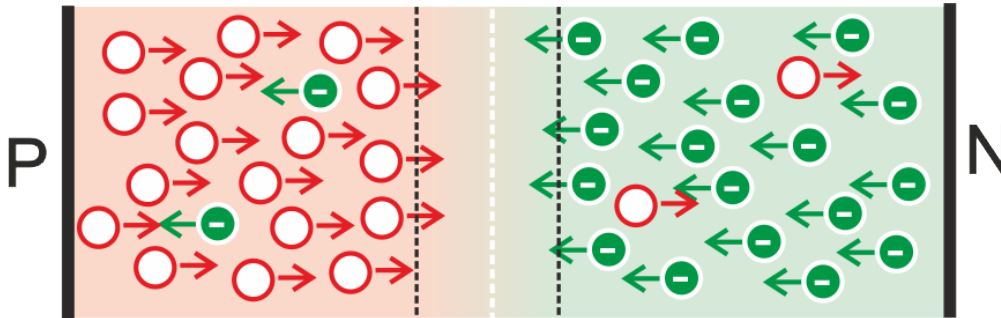
$$U_h = R_h \frac{I \cdot B}{d} = 3,66 \cdot 10^{-4} \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,9}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 82,35 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Hodnota Hallového napätia na senzore bude $82,35 \cdot 10^{-3} \text{ V}$, čo je viac ako požadovaných 60 mV, teda senzor bude pracovať správne a po zatvorení displeja dôjde k jeho zhasnutiu.

Príklad 5.4 Vypočítajte, pri akom napätí bude polovodičová dióda zapojená v priepustnom smere vodivá. Uvažujte germaniovú diódu. Koncentrácia akceptorových prímiesí je 10^{21} m^{-3} , koncentrácia donótorových nosičov prímiesí je 10^{20} m^{-3} a koncentrácia nosičov vlastného polovodiča pri teplote 300 K je $2,5 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$.

Teoretický rozbor a riešenie:**PN priechod**

V jednom monokryštáli polovodiča môžeme vytvoriť vhodnou technológiou dve oblasti s rôznym typom vodivosti. Oblasť monokryštalického polovodiča, v ktorom sa mení vodivosť z typu P na typ N (alebo opačne) sa nazýva PN priechod.



Obr. 5.4 PN prechod

Pretože v oblasti P je nadbytok diery a v oblasti N je nadbytok elektrónov začne ihneď po vytvorení priechodu (po ukončení technologického procesu) medzi obidvoma oblasťami pôsobiť príťažlivá elektrostatická sila (Coulombovská sila):

$$F = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

V najbližšom okolí priechodu prechádzajú diery z oblasti P do oblasti N a elektróny naopak. Súčasne vzniká v oblasti N nepohyblivý priestorový náboj kladných iónov, ktoré tam zostali po elektrónoch a v oblasti P nepohyblivý náboj záporných iónov, ktoré tam zostali po dierach. Elektrické pole medzi oboma priestorovými nábojmi vzrastá dovedy, až nastane rovnováha medzi príťažlivou silou opačných nábojov v oblastiach P a N a elektrostatickou silou priestorového náboja. V tesnom okolí hraničnej plochy medzi oblasťami P a N sa vytvorí vyprázdnená oblasť. Vzniknuté elektrostatické pole nepohyblivých iónov sa nazýva potenciálová bariéra.

PN priechod v priepustnom smere

Zapojením PN priechodu v priepustnom smere rozumieme také zapojenie pri ktorom je P časť pripojená ku kladnému pólu napätia a N časť je pripojená k zápornému pólu. Pri takom zapojení záporný potenciál na polovodiči N začne priťahovať diery z polovodiča P a naopak elektróny polovodiča N sú priťahované kladným potenciálom do polovodiča P. Po prekročení takzvaného difúzneho napätia dochádza k zániku potenciálovej bariéry a priechod sa stáva vodivým. Hodnotu difúzneho napätia je možné vypočítať pomocou vzťahu:

$$U_d = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{n_P}{n_N} \right)$$

kde

k je Boltsmanová konštanta,

T je teplota,

e je elementárny náboj,

n_p a n_n sú koncentrácie nosičov náboja.

PN priechod v závernom smere

Pripojením záporného potenciálu na polovodič typu P a kladného potenciálu na polovodič typu N dochádza k uzatvoreniu PN priechodu. Dochádza k tomu preto, lebo elektróny sú priťahované ku kladnému potenciálu a diery k zápornému. Pri tomto zapojení sa potencialová bariéra rozšíri a PN priechod je uzatvorený. V závernom smere tečie záverný prúd rádovo v mikro ampéroch. Tento je spôsobený minoritnými vodičmi náboja.

Využitie v praxi

PN priechod sa najčastejšie využíva v polovodičových diódach. Dióda je považovaná za základnú súčiastku elektroniky. Používa sa na usmernenie striedavého el. napätia. PN priechod sa tiež využíva pri tvorbe tranzistorov.

Najprv je potrebné vypočítať koncentráciu nosičov náboja v oboch polovodičoch. Koncentrácia v polovodiči N je daná priamo koncentráciou donorov, teda:

$$n_n = n_D = 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

Koncentrácia v polovodiči typu P je daná ako podiel kvadrátu koncentrácie nosičov vlastného polovodiča a koncentrácie akceptorov, teda:

$$n_p = \frac{n_i^2}{n_A} = \frac{(2,5 \cdot 10^{17})^2}{10^{21}} = 6,25 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$$

Nakoniec je možné vypočítať hodnotu difúzneho napätia:

$$U_d = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_p}{n_n}\right) = \frac{300,138 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \ln\left(\frac{10^{20}}{6,25 \cdot 10^{13}}\right) = 0,369 \text{ V}$$

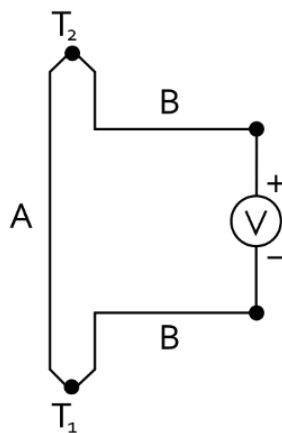
Príklad 5.5 Vypočítajte hodnotu termoelektrického napätia na vývodoch Seebeckového článku tvoreného spojením titánu a kremíka ak vieme, že relatívny rozdiel Seebeckových koeficientov týchto dvoch materiálov je rovný $440 \mu\text{VK}^{-1}$. Jedná strana tohto článku je ohrievaná na 300°C a druhá je

udržiavaná na teplote 80°C. Predpokladajme, že obidva materiály v danom rozsahu teplôt majú stabilnú hodnotu Seebeckových koeficientov.

Teoretický rozbor a riešenie:

Seebeckov jav

Je to prvý termoelektrický jav, ktorý bol objavený **T. J. Seebeckom** v roku 1821. Podstata tohoto javu spočíva v tom, že ak budeme ohrievať spoj medzi dvomi elektrickými vodičmi, vyprodukuje to elektromotorické napätie. Veľkosť tohoto napätia je závislá na rozdiel medzi teplotou spoja dvoch kovov a teplotou spojenia s meriacím zariadením. Seebeckov jav je umožnený prechodom elektrónov medzi dvomi kovovými materiálmi. Zohriatím spoja dvoch kovov sa umožní presun elektrónov z materiálu v ktorom majú nižšiu energiu do materiálu, v ktorom elektróny vykazujú vyššiu energiu, tým vznikne elektromotorické napätie. Seebeck zistil, že tento fenomén sa prejavuje v mnohých materiáloch (niektoré z nich dnes poznáme ako polovodiče) a usporiadal tieto materiály podľa veľkosti Seebeckovho koeficientu α a elektrickej vodivosti σ . Seebeckov koeficient sa udáva vo voltoch na stupne celzia, ale častejšie v mikrovoltoch na Kelvín. Prepojením dvoch materiálov dostaneme diferenciálny Seebeckov koeficient.



Obr. 5.5 Principiálne spojenie dvoch materiálov za účelom demonštrácie Seebeckovho javu

Termoelektrické napätie môžeme vypočítať pomocou nasledovného vzťahu:

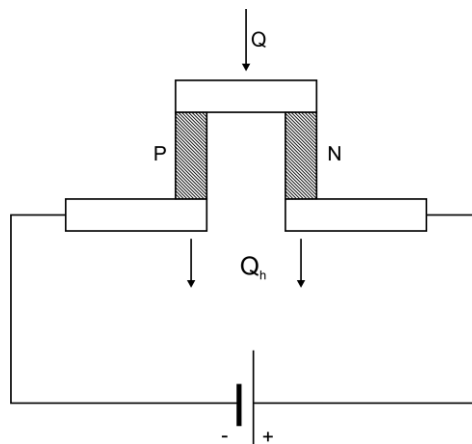
$$U_T = \int_{T_1}^{T_2} (S_B(T) - S_A(T)) dt$$

kde S_A a S_B sú Seebeckové koeficienty materiálov. Je nutné poznamenať, že tieto koeficienty sú teplotne závislé.

Peltierov jav

Tento jav bol objavený **J. Peltierom** o dvanásť rokov neskôr ako Seebeckov jav, sú to inverzné javy. Pri prechode elektrického prúdu termoelektrickou dvojicou sa spoj medzi dvomi kovmi začne ohrievať alebo ochladzovať v závislosti na smere prúdu.

V praxi sa pri konštrukcii Peltierového článku nepoužíva spojenie dvoch kovov tak, ako to objavil samotný Peltier. Dnes sa využívajú polovodiče typu P a N, ktoré sú spojené medeným vodičom, v ktorom sa elektróny pohybujú omnoho ľahšie. Keď elektróny opustia P polovodič zanechajú za sebou kladné diery, ktoré sa pohybujú smerom ku teplému koncu polovodiča. Elektrón musí prijať energiu, aby dosiahol energickú hladinu elektrónov v medenom vodiči. Túto energiu dostane absorbovaním tepla, teda táto strana polovodiča sa ochladí. Na opačnej strane polovodiča vstupujú do voľných kladných dier elektróny, ktoré klesnú na nižšiu energickú hladinu a tým sa uvoľní teplo. Polovodič typu N je tvorený atómami, ktoré obsahujú viac elektrónov ako je potrebné na dokončenie atómovej väzby v kryštalickej mriežke. Keď je do materiálu pustený prúd tieto elektróny sa ľahko dostanú do pásma vodivosti, je však potrebná energia na to, aby sa dostali na rovnakú energickú úroveň ako elektróny ktoré prídu do polovodiča zo spoja. Táto energia je získaná absorbovaním tepla. Elektróny postupujú od studeného konca k teplému, kde opäť klesnú na nižšiu energickú hladinu a energia sa uvoľní v podobe tepla. Toto je jednoduché vysvetlenie zložitých fyzikálnych dejov, ktoré v materiáloch prebiehajú. Výkonnosť modulu závisí na viacerých premenných, ako napríklad na veľkosti prúdu, vlastnostiach materiálu a geometrii prvku.



Obr. 5.6 Peltierov článok

Nakoľko v zadaní je uvedené, že hodnoty Seebeckových koeficientov sú konštantné v danom rozsahu teplôt vzťah pre výpočet termoelektrického napätia môžeme prepísať nasledovne:

$$U_T = \int_{T_1}^{T_2} (S_B(T) - S_A(T)) dt = \int_{T_1}^{T_2} (S_B - S_A) dt$$

a následným integrovaním dostávame :

$$U_T = (S_B - S_A)(T_2 - T_1)$$

kde $(S_B - S_A)$ predstavuje relatívny rozdiel Seebeckových koeficientov ΔS

Dosadením hodnôt zadaných v zadaní získavame:

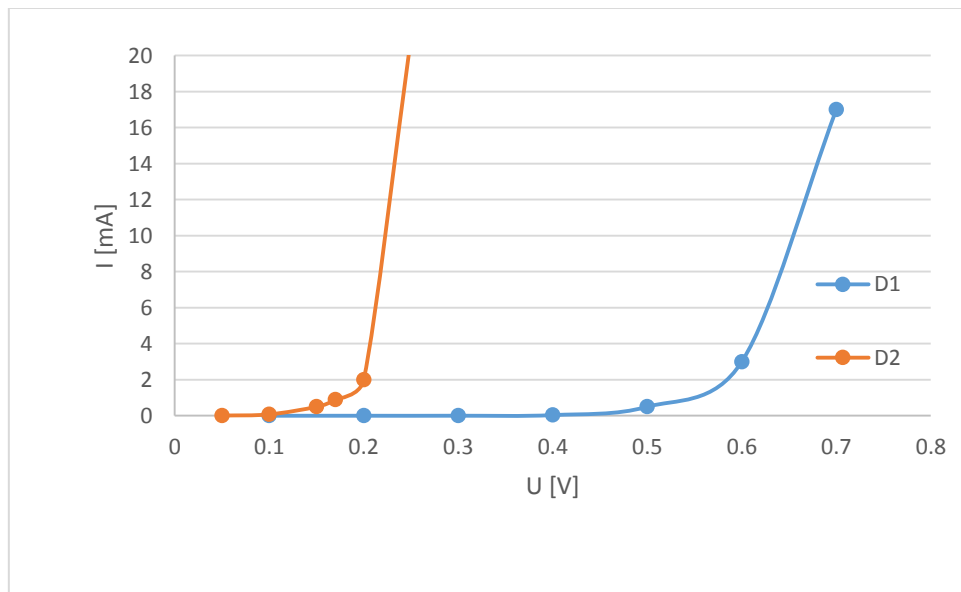
$$U_T = (S_B - S_A)(T_2 - T_1) = \Delta S(T_2 - T_1) = 440(300 - 80) = 96,8 \text{ mV}$$

Príklad 5.6 Nakreslite VA charakteristiku dvoch polovodičových diód, ktorých namerané hodnoty napätia a prúdu sú v tabuľke. Odhadnite, o aké typy polovodičových diód ide.

Tab. 5.1 Hodnoty napätia a prúdu polovodičových diód pre príklad 5.6

U_1 [V]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
I_1 [mA]	0	0	0,001	0,036	0,5	3	17
U_2 [V]	0,05	0,1	0,15	0,17	0,2	0,25	0,3
I_2 [mA]	0,009	0,075	0,5	1	1,2	21	40

Riešenie:



Obr. 5.7 V-A charakteristika polovodičových diód z príkladu 5.6

Ide o Germániovú diódu s difúznym napätím približne 0,2 V (D2) a kremíkovú diódu s difúznym napätím približne 0,55 V (D1).

5.9 Neriešené príklady

Príklad 5.7 Merný elektrický odpor intrinzického germánia pri teplote 20°C je 0,47 Ωm. Vypočítajte pri tejto teplote koncentráciu nosičov náboja, ak je pohyblivosť elektrónov $u_n=0,38 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ a pohyblivosť dier je $u_p=0,18 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

$$[n_i=2,3716 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.8 Vypočítajte koncentráciu elektrónov a dier v intrinzickom kremíku pri teplote 20°C a 100°C, ak efektívna hmotnosť elektrónov a dier je zhodná s hmotnosťou elektrónov. Šírka zakázaného pásma kremíka je 1,21 eV.

$$[t=20^\circ\text{C}: n_n=n_p=9,56 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}; t=100^\circ\text{C}: n_n=n_p=2,339 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.9 Šírka zakázaného pásma antimonidu gália je 0,8 eV a antimonidu india 0,2 eV. Vypočítajte koncentrácie elektrónov a dier pri teplote 20 °C, ak efektívne hmotnosti oboch nosičov náboja sú rovné hmotnosti voľných elektrónov.

$$[\text{GaSb}: n_n=n_p=3,174 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}; \text{InSb}: n_n=n_p=4,61 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.10 Odpor vzorky kremíka *n*-typu dĺžky 2 cm a prierezu 15 mm² je pri teplote 20°C 66,6 Ω. Vypočítajte pohyblivosť elektrónov, ak koncentrácia prímiesí je 10²¹ m⁻³ a všetky prímiesy sú ionizované.

$$[u_n=0,1249 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}]$$

Príklad 5.11 Koncentrácia donorových prímiesí vo vzorke kremíka *n*-typu je 4.10²⁴ m⁻³. Vypočítajte koncentráciu donorových atómov, ktoré budú zionizované pri teplote 20°C a 20 K, ak rozdiel energií spodnej hladiny vodivostného pásma a energií donorových prímiesí je 0,049 eV. Predpokladajte, že efektívna hmotnosť elektrónov je rovná hmotnosti voľného elektrónu

$$[t=20^\circ\text{C}: n_n=2,637 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}; T=20 \text{ K}: n_n=6,2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.12 Vychádzajte z Fermiho rozdeľovacej funkcie a vypočítajte pre kremík pri teplote 293 K pravdepodobnosť obsadenia energetických hladín elektrónmi na spodnej hranici vodivostného pásma, keď Fermiho hladina sa nachádza v strede zakázaného pásma polovodiča. Šírka zakázaného pásma kremíka je 1,21 eV.

$$[P_{(n)F}=3,8895 \cdot 10^{-11}]$$

Príklad 5.13 Vo vzorke monokryštálu germánia bola pri teplote 20°C nameraná pohyblivosť dier 0,18 m²/V.s. Akú má hodnotu koeficient difúzie týchto nosičov náboja?

$$[D_p=4,543 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}]$$

Príklad 5.14 Pri teplote 20°C bol na vzorke polovodiča širokého 5 cm a hrubého 0,2 mm nameraný merný elektrický odpor $8,93 \cdot 10^{-3} \Omega\text{m}$. Vypočítajte veľkosť Hallovhovho napätia, pohyblivosť a koncentráciu nosičov prúdu pri teplote 20°C za predpokladu, že prúd je podmienený nosičmi len jedného druhu, ak vzorkou preteká prúd $5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$ a pôsobí na ňu magnetické pole s indukciou 0,5 T orientovaná rovnobežne s hranou hrubou 0,2 mm. Hallova konštanta nech je $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$ a súčiniteľ A je $(3\pi)/8$.

$$[U_H=0,04575 \text{ V}; u=0,035 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}; n=2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.15 Vypočítajte koeficient difúzie elektrónov a dier v monokryštále kremíka pri teplote 20°C , ak pri tejto teplote je pohyblivosť elektrónov $0,17 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ a pohyblivosť dier je $0,035 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

$$[D_n=4,29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}; D_p=8,837 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}]$$

Príklad 5.16 Vzorkou polovodiča širokého 1 cm a hrubého 1 mm tečie prúd 15 mA za pôsobenia magnetického poľa s indukciou 0,5 T, orientovaného rovnobežne s 1 mm hranou vzorky. Vypočítajte Hallovo napätie, ak Hallova konštanta vzorky je $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{C}$.

$$[U_H=2,745 \text{ mV}]$$

Príklad 5.17 Vzorka prímiesového kremíku má pri teplote 20°C rezistivitu $8,93 \cdot 10^{-3} \Omega\text{m}$ a Hallovu konštantu $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{C}$. Vypočítajte pohyblivosť a koncentráciu nosičov náboja pri teplote 20°C , ak prúd je podmienený nosičmi len jedného druhu a koeficient $A = 3\pi/8$.

$$[u=3,478 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}; n=2,009 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}]$$

Príklad 5.18 Určte potenciálny rozdiel PN prechodu germániového usmerňovacieho prvku, ak oblasť prechodu je v tepelnej rovnováhe. Rovnovážna koncentrácia elektrónov v polovodiči typu n je $3,57 \cdot 10^{23} / \text{m}^3$ a v oblasti p $1,75 \cdot 10^{15} / \text{m}^3$. Pri výpočte uvažujte teplotu 25°C .

$$[U_b=0,491 \text{ V}]$$

Príklad 5.19 Vypočítajte difúzne napätie na strmom P-N prechode germániovej diódy, ak koncentrácia akceptorových prímiesí je 10^{21} m^{-3} , koncentrácia donorových prímiesí je 10^{20} m^{-3} a koncentrácia nosičov vlastného polovodiča pri teplote 300 K je $2,5 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$.

$$[U_b=0,369 \text{ V}]$$

Príklad 5.20 Vypočítajte prúdovú hustotu pri teplote 20°C na P-N prechode germániového prvku, ak naň pôsobí v priamom smere jednosmerné napätie 0,5 V. Rovnovážna koncentrácia dier v oblasti n je $3,57 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$ a rovnovážna koncentrácia elektrónov v oblasti p je $1,7 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, pohyblivosť elektrónov je $0,38 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, pohyblivosť dier je $0,18 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Doba života nosičov je pre oba náboje 0,1 ms.

$$[J=1,0749 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}]$$

Príklad 5.21 Na vzorke vlastného germánia sa meraním zistila pri teplote 20°C merná elektrická vodivosť $2,14 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ a pri teplote 70 °C bola nameraná elektrická vodivosť $16,8 \text{ S/m}$. Aká je šírka zakázaného pásma tohto polovodiča?

$$[\Delta W_z = 1,144 \cdot 10^{-19} \text{ J}]$$

Príklad 5.22 Strmý prechod germániovej diódy má plochu $0,02 \text{ mm}^2$. Koncentrácia donorových prímiesí 10^{20} a akceptorových 10^{21} m^{-3} a nosičov náboja vlastného polovodiča $2,5 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ pri teplote 300 K. Vypočítajte šírku, kapacitu a difúzne napätie na PN prechode, ak naň v závernom smere pôsobí jednosmerné napätie 5 V. Relatívna permitivita germánia je pri normálnych fyzikálnych podmienkach 16.

$$[U_D = 0,369 \text{ V}; h_{p,n} = 10,22 \text{ }\mu\text{m}; C_{p,n} = 0,277 \text{ pF}]$$

Príklad 5.23 Závislosť odporu NTC rezistorov na teplote je s dostatočnou presnosťou vyjadrená závislosťou $R = A e^{\frac{b}{T}}$. Vypočítajte konštanty A [Ω] a b [K] a teplotný súčiniteľ odporu α_R [K^{-1}], ak odpor termistoru pri teplote 20°C je $120 \text{ }\Omega$ a pri teplote 85°C je $17,5 \text{ }\Omega$.

$$[A = 2,978 \text{ m}\Omega; b = 3,107 \cdot 10^3 \text{ K}; T_1 = 20^\circ\text{C}: \alpha_R = -0,03619 \text{ K}^{-1}; T_2 = 85^\circ\text{C}: \alpha_R = -0,02424 \text{ K}^{-1}]$$

Príklad 5.24 Pozdĺž vzorky germánia *n*-typu sa mení koncentrácia prímiesí z 10^{21} na 10^{24} m^{-3} . Aký je potenciálny rozdiel medzi miestom s najmenšou a najväčšou koncentráciou pri teplote 300 K, ak sú všetky prímiesi zionizované. Uvažujte správanie náboja podľa Boltzmannovej štatistiky.

$$[U = 0,178 \text{ V}]$$

Príklad 5.25 Elektrická vodivosť hliníka je $3,8 \cdot 10^7 \text{ }\Omega\text{m}$, pričom pohyblivosť elektrónov je $0,0012 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Vypočítajte Hallove napätie pre vzorku vyrobenú z hliníka hrúbky 15 mm, ktorou tečie prúd 25 A za pôsobenia magnetického poľa s indukciou 0,6 T (v smere kolmom na prúd).

$$[U_H = -3,16 \cdot 10^{-8} \text{ V}]$$

Zoznam použitej literatúry

- [1] Pietriková, A., Banský, J.: Základy inžinierstva materiálov. Košice, Elfa, 2005. 278 s. ISBN 80-8086-001-7
- [2] Slosarčík, S., Pietriková, A., Kapušanská, E., Urbančík, J.: Materiály a technológia. Skriptum, Edičné stredisko TU v Košiciach, 1992, ISBN 80-7099-158-5
- [3] Liedermann, K.: Fyzika a technologie elektrotechnických materiálov – Sbíрка příkladů. Brno, Ediční stredisko VUT Brno, 1982. 153 s.
- [4] Askeland, D., Fulay, P., Wright, W.: The Science and Engineering of Materials. USA, Cengage Learning, 2011. 949 s. ISBN 978-0-495-29602-7
- [5] Callister, W., Rethwisch, D.: Fundamentals of Materials Science and Engineering. USA, John Wiley & Sons, Inc., 2008. 911 s. ISBN 978-0-470-12537-3
- [6] Honeywell, „Snímače elektrického proudu s Halloovou sondou,“ [Online]. Dostupné: www.honeywell.sk/?com=documents&id=91.
- [7] Doleček, J.: Moderní učebnice elektroniky 2. Praha: nakladatelství BEN - technická literatura, 2005.
- [8] <http://hockicko.uniza.sk>, „Vlastnosti PN přechodu,“ [Online]. Dostupné: <http://hockicko.uniza.sk/semestralky/prace/p41/index.htm>.
- [9] vyvoj.hw.cz, „Peltierovy termobaterie,“ [Online]. Dostupné: <http://vyvoj.hw.cz/teorie-a-praxe/dokumentace/peltierovy-termobaterie.html>.

Názov	Návody na cvičenia z predmetu Základy inžinierstva materiálov
Autori	Ing. Peter Lukács, PhD., Ing. Tibor Rovenský, PhD.
Vydavateľ	Technická univerzita v Košiciach
Rok	2017
Vydanie	prvé
Náklad	70 ks
Rozsah	78 strán
ISBN:	978-80-553-2841-6