Riešené príklady z fyziky (doplnkový materiál k cvičeniam a zbierke príkladov)

Kinematika

Príklad 1.1 Pohyb bodu je určený rovnicami: $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cms^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $A_2 = 15$ cms^{-2}, $B_2 = -3$ cm. Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t_1 = 2$ s a určte rovnicu dráhy jeho pohybu.

$x = A_1t^2 + B_1$ (1)
$y = A_2t^2 + B_2$ (2)
$A_1 = 20$ cms^{-2}, $B_1 = 5$ cm,
$A_2 = 15$ cms^{-2}, $B_2 = -3$ cm

v = ?, a = ? ……. $t = 2$ s

Riešenie:

Hmotný bod vykonáva pohyb v rovine a súradnicami x, y je určený jeho polohový vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\,, \quad (3)$$

kde súradnice x a y sú dané vzťahmi (1) a (2).Vektor rýchlosti vypočítame ako deriváciu polohového vektora (3) podľa času

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = 2A_1t\vec{i} + 2A_2t\vec{j}\,, \quad (4)$$

kde $2A_1t = v_x$, $2A_2t = v_y$.

Vektor zrýchlenia je daný ako derivácia vektora rýchlosti (4) podľa času

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = 2A_1\vec{i} + 2A_2\vec{j}\,.$$

Na výpočet veľkosti vektorov použijeme vzťahy

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow v = \text{konšt.}t\,,$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \text{konšt.}\cdot$$

Smer vektora $\vec{v}$ možno charakterizovať uhlom medzi osou x a týmto vektorom a vypočítať ho zo vzťahu pre smerové kosínusy.

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \Rightarrow \alpha_v = \arccos\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$. Analogicky pre smer vektora zrýchlenia

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \Rightarrow \alpha_a = \arccos\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$v = 1\,\mathrm{ms}^{-1},\ a = 0{,}5\,\mathrm{ms}^{-2}, \cos\alpha_v = \cos\alpha_a \Rightarrow \alpha_v = \alpha_a = 36.9\,°\,.$$

Veľkosť rýchlosti v časovom okamihu 2 s je 1 m/s a veľkosť zrýchlenia 0,5 m/s^2. Smer rýchlosti a zrýchlenia je daný uhlom 36,9 ° .

Smer vektorov $\vec{v}$ a $\vec{a}$ sa v čase nemení, hmotný bod sa teda pohybuje v rovine po priamke.

Môžeme sa o tom presvedčiť odvodením rovnice dráhy jeho pohybu, teda určením rovnice krivky $y = f(x)$, po ktorej sa hmotný bod v rovine pohybuje.

Z rovnice (1) vyjadríme $t^2 = \dfrac{x - B_1}{A_1}$ a dosadíme do rovnice (2). Úpravou dostaneme rovnicu priamky $y = \dfrac{A_2}{A_1}x - \dfrac{A_2}{A_1}(B_2 - B_1) = kx + q$,kde $k = \dfrac{A_2}{A_1}$ a $q = \dfrac{A_2}{A_1}(B_2 - B_1)$ sú parametre priamky. Hmotný bod sa pohybuje po priamke. Veľkosť jeho zrýchlenia je konštantná a jeho rýchlosť v čase lineárne rastie, z čoho môžeme usúdiť, že bod vykonáva rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb.

Príklad 1.2 Bod sa pohybuje po krivke $y = \ln x$ konštantnou rýchlosťou v_0. Aké je jeho zrýchlenie v ľubovoľnom mieste dráhy.

$y = \ln x$

v_0

---

a = ?

Riešenie:

Pre veľkosť rýchlosti v každom okamihu platí $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. (1)

Súradnice rýchlosti vyjadríme zo vzťahov

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad (2) \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}v_x \quad (3)$$

a dosadíme do (1)

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + \frac{v_x^2}{x^2}} = v_x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{v_x}{x}\sqrt{1 + x^2} \ . \quad (4)$$

Pre x - ovú súradnicu rýchlosti úpravou vzťahu (4)

$$v_x = \frac{x v_0}{\sqrt{1 + x^2}} \ . \quad (5)$$

A pre y - ovú súradnicu rýchlosti použitím (1) a (5)

$$v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2} = \sqrt{v_0^2 - \frac{x^2 v_0^2}{1 + x^2}} = v_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + x^2}} = v_0\sqrt{\frac{1 + x^2 - x^2}{1 + x^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

Derivovaním súradníc rýchlosti vyjadríme súradnice zrýchlenia. Pre x - ovú súradnicu zrýchlenia

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = v_0\frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$a_x = v_0\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \quad (6)$$

Pre y - ovú súradnicu zrýchlenia

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$a_y = -\frac{1}{2}\frac{2xv_0}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2v_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \quad (7)$$

Pre veľkosť celkového zrýchlenia použitím (6) a (7)

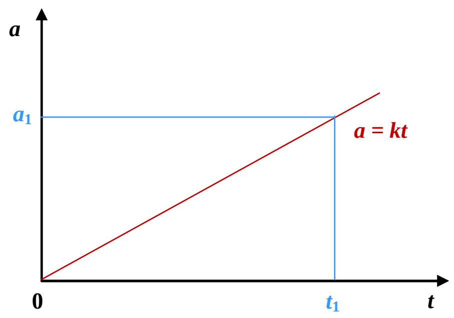
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}\sqrt{1+x^2} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Zrýchlenie bodu v ľubovoľnom mieste dráhy je dané vzťahom (8).

Príklad 1.3 Auto sa rozbieha z pokoja s rovnomerne rastúcim zrýchlením tak, že v čase t_1 = 10 s má hodnotu a_1 = 0,4 ms^{-2}. Akú rýchlosť má auto v čase t_2 = 20 s a akú dráhu za ten čas prešlo?

t_1 = 10 s .... a_1 = 0,4 ms^{-2}

v = ? s = ? ...... t_2 = 20 s



Obr. 1.1

Riešenie:

Závislosť zrýchlenia na čase možno popísať graficky tak, ako je na obr. 1.1, teda závislosť je lineárna a platí $a = k.t$ (1), kde k je konštanta.

Súvis rýchlosti a zrýchlenia popisuje vzťah $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, ktorý pre priamočiary pohyb má tvar

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Jeho úpravou dostaneme rovnicu

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t,$$

ktorú integrujeme

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{0}^{t} a\mathrm{d}t,$$

pričom za zrýchlenie dosadíme vzťah (1) a dostaneme rovnicu

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{0}^{t} kt\mathrm{d}t.$$

Jej integráciou pre rýchlosť

$$v = v_0 + k\frac{t^2}{2},$$

v ktorom počiatočná rýchlosť v_0 je nulová, pretože auto sa rozbieha z pokoja. Platí teda, že závislosť rýchlosti na čase je kvadratická a má tvar

$$v = k\frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

Súvis dráhy a rýchlosti pre priamočiary pohyb popisuje vzťah

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

z ktorého po úprave dostaneme rovnicu

$$s = \int_{0}^{t} v\mathrm{d}t, \quad (3)$$

kde v nie je veličina v čase konštantná, ale popisuje ju vzťah (2).
Dosadením (2) do (3) rovnica pre dráhu

$s = \int_{0}^{t} k\dfrac{t^2}{2}\mathrm{d}t$ a po integrácii $s = k\dfrac{t^3}{6}$. (4)

Konštantu k v rovnici (4) a (2) určíme z počiatočných podmienok, že v čase t_1 má auto zrýchlenie a_1

$$k = \frac{a_1}{t_1}.$$

Po dosadení číselných hodnôt $k = 4.10^{-2}\,\mathrm{ms}^{-3}$, $v = 8\,\mathrm{ms}^{-1}$, $s = 53{,}33\,\mathrm{m}$.

Auto má v čase 20 s rýchlosť 8 m/s a za tento časový interval prešlo dráhu 53,33 m.

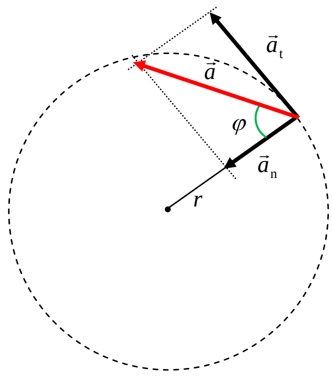
Príklad 1.4 Koleso polomeru R = 10 cm sa otáča tak, že pre body na jeho obvode platí $v = At + Bt^2$, A = 3cms^{-2}, B = 1cms^{-3}.Určte uhol, ktorý zviera vektor celkového zrýchlenia s polomerom v čase t_1 = 1 s

R = 10 cm

$v = \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2$

<u>$\mathrm{A} = 3\mathrm{cm.s^{-2}}$, $\mathrm{B} = 1\mathrm{cm.s^{-3}}$</u>

$\varphi_1 = ?$



Obr. 1.2

Riešenie:

Situácia je znázornená na obr. 1.2 odkiaľ platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}} = \frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{\frac{v^2}{R}} = R\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At + Bt^2\right)}{v^2} = R\frac{A + 2Bt}{\left(At + Bt^2\right)^2}$$. Po číselnom dosadení

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = R\frac{A + 2Bt_1}{\left(At_1 + Bt_1^2\right)^2} = 0{,}1\frac{(3 + 2.1.1).10^{-2}}{(3.1 + 1.1)^2.10^{-4}} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

Uhol, ktorý zviera vektor celkového zrýchlenia s polomerom v čase t_1 = 1 s je $\varphi_1 = 72{,}26^\circ$.

Príklad 1.5 Na horskej dráhe na pasažierov pôsobí dostredivé zrýchlenie, ktoré spôsobuje u človeka preťaženie. Aby jazda na tobogane bola pre pasažierov bezpečná, musí byť hodnota zrýchlenia menšia ako 4*g*. To sa dosahuje tak, že sa stavajú horské dráhy s veľkými polomermi. Pri hodnote preťaženia rovnajúcemu sa 4*g* človek už môže pociťovať problémy s videním. Nebezpečná je hodnota 6*g*, pri ktorej netrénovaný pasažier stráca vedomie. Odhadnite, aký môže mať polomer horská dráha, aby vozík, ktorý urobí obrat o 90 stupňov spĺňal podmienku pre preťaženie $a_\mathrm{d} < 4g$. Počítajte s rýchlosťou vozíka 112 km/h.

$a_\mathrm{d} < 4g$ (1)

<u>v = 112 km/h</u>

R = ?

Riešenie:

Dostredivé zrýchlenie má smer do stredu kružnice a teda predstavuje normálové zrýchlenie. Dosadením do (1)

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{R} \rangle\ 4g\ ,$$

kde v je rýchlosť vozíka a R polomer dráhy.

Úpravou pre polomer dostaneme

$$R > \frac{v^2}{4g} = 24{,}2\ \text{m}$$

Polomer dráhy by mal byť väčší ako 24,2 m.

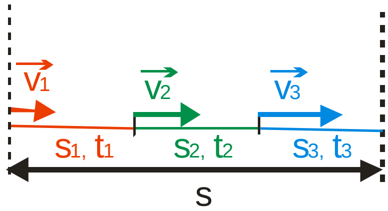
Príklad 1.6 Vlak prešiel prvú tretinu svojej dráhy rýchlosťou 20 km/h, druhú tretinu rýchlosťou 30 km/h a poslednú tretinu rýchlosťou 80 km/h. Aká je priemerná rýchlosť vlaku?

v_1 = 20 km/h, $s_1 = s/3$

v_2 = 30 km/h, $s_2 = s/3$

v_1 = 80 km/h, $s_3 = s/3$

v_p = ?



Obr. 1.6

Riešenie:

Zo zadania príkladu vyplýva, že každú tretinu dráhy prejde vlak inou konštantnou rýchlosťou, teda na danom úseku dráhy sa vlak pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom (obr. 1.6). Na určenie priemernej rýchlosti použijeme vzťah (**Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.**) $v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = s_1 + s_2 + s_3$ a $\Delta t = t_1 + t_2 + t_3$,

potom $v_p = \dfrac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}$ (1).

Dráhu $s_1 = \dfrac{s}{3}$ prejde za dobu t_1 rýchlosťou v_1, pre ktorú platí $v_1 = \dfrac{s_1}{t_1}$ (z rovnice pre dráhu rovnomerného priamočiareho pohybu).

Potom doba $t_1 = \dfrac{s_1}{v_1} = \dfrac{s}{3v_1}$ (2).

Analogicky pre dobu $t_2 = \dfrac{s_2}{v_2} = \dfrac{s}{3v_2}$ (3) a $t_3 = \dfrac{s_3}{v_3} = \dfrac{s}{3v_3}$ (4).

Dosadením (2), (3), (4) do vzťahu (1) vypočítame priemernú rýchlosť vlaku

$$v_p = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s}{\frac{s}{3v_1} + \frac{s}{3v_2} + \frac{s}{3v_3}} = \frac{s}{\frac{s}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)} = \frac{3v_1v_2v_3}{v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2}$$

$$v_p = \frac{3.20.30.80}{30.80 + 20.80 + 20.30} = 31{,}3\ \text{km/h}$$

Priemerná rýchlosť vlaku je 31,3 km/h.

Príklad 1.7 Teleso sa dáva do pohybu so zrýchlením 2 m/s^2. Akú veľkú rýchlosť malo na konci dráhy dlhej 100 m?

a = 2 m/s^2

s = 100 m

v = ?

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že teleso sa pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom, ktorého dráhu a rýchlosť vieme popísať nasledovnými rovnicami

$v = v_0 + at$,

$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

V tomto prípade je počiatočná rýchlosť telesa nulová (v_0 = 0 m/s), pretože sa začína teleso pohybovať z pokoja. Potom na určenie rýchlosti telesa na konci dráhy 100 m použijeme rovnicu $v = at$ (1), kde t je neznáma veličina, ktorú vyjadríme z rovnice dráhy $s = \frac{1}{2} a t^2$. Odtiaľ pre dobu platí $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ (2).

Dosadením (2) do (1) vypočítame rýchlosť na konci prejdenej dráhy

$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = \sqrt{2.100.2} = 20\,\text{m/s}$.

Rýchlosť telesa na konci dráhy 100 m je 20 m/s.

Príklad 1.8 Vodič auta začne brzdiť, pričom veľkosť spomalenia je 6,5 m/s^2. Kým zastaví prejde dráhu 45 m. Za akú dobu zastavil a aká bola začiatočná rýchlosť auta?

a = 6,5 m/s^2

<u>s = 45 m</u>

t = ? v_0 = ?

Riešenie:

Auto sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, pre ktorý platia vzťahy

$v = v_0 - at$ (1)

$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ (2).

Veľkosť rýchlosti auta sa rovnomerne zmenšuje. Keď sa auto zastaví, veľkosť jeho rýchlosti je v = 0 m/s, teda po dosadení rýchlosti do (1) si môžeme vyjadriť čas zastavenia auta

$0 = v_0 - at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$ (3).

Dosadením rovnice (3) do (2) dostaneme rovnicu pre dráhu

$s = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0}{a}^{2} = \frac{v_0}{2a}^{2}$,

z ktorej úpravou vypočítame počiatočnú rýchlosť auta

$v_0 = \sqrt{2sa} = \sqrt{2.45.6{,}5} = 24{,}2\,\text{m/s}$.

Po dosadení do (3) vypočítame čas, za ktorý sa auto zastaví

$t = \frac{24{,}2}{6{,}5} = 3{,}7\,\text{s}$.

Auto zastavilo za 3,7 s a jeho počiatočná rýchlosť bola 24,2 m/s.

Príklad 1.9 Dve telesá, ktoré sú vzdialené od seba na začiatku 100 m, sa pohybujú proti sebe. Prvé rovnomerne rýchlosťou 3 m/s, druhé rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou 7 m/s a zrýchlením 4 m/s^2. Nájdete miesto a dobu ich stretnutia.

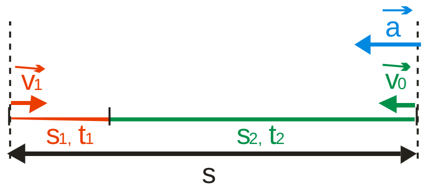
v_1 = 3 m/s

v_0 = 7 m/s

a = 4 m/s^2

<u>s = 100 m</u>

t = ?, s_1 = ?



Obr. 1.7

Riešenie:

Telesá sa pohybujú oproti sebe. Prvé rovnomerným priamočiarym pohybom, druhé rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom. Prvé teleso prejde do miesta stretnutia dráhu s_1 za dobu t_1 a druhé prejde dráhu s_2 za dobu t_2 (obr. 1.7). Potom vzhľadom na ich vzájomnú vzdialenosť s pre ich prejdené dráhy platí $s = s_1 + s_2$ (1). Doba, za ktorú sa telesá stretnú je rovnaká $t = t_1 = t_2$.

Dráha ktorú prejde prvé telesa je podľa vzťahu (**Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.**) $s_1 = v_1 t$ (2), dráha druhého telesa je podľa vzťahu $s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (3).

Dosadením (2) a (3) do (1) pre vzájomnú vzdialenosť platí

$$s = v_1 t + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

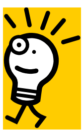
Po dosadení známych číselných hodnôt a následnej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$0 = 2t^2 + 10t - 100 ,$$

ktorej diskriminant $D = 10^2 - 4.2.100 = 900$. Potom doba, za ktorú sa telesá stretnú sa vypočíta ako

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2.2} .$$

Dostali sme dve riešenia $t_1 = \frac{-10+30}{2.2} = 5\,\mathrm{s}$ a $t_2 = \frac{-10-30}{2.2} = -10\,\mathrm{s}$.



Vo fyzike má význam len kladná hodnota doby stretnutia telies, preto druhý koreň kvadratickej rovnice neberieme do úvahy. Riešením je prvý koreň rovnice teda t_1 = 5 s.

Zaujíma nás ešte miesto stretnutia telies. To určíme tak, že do rovnice (2) alebo (3) dosadíme za čas t = 5 s.

$$s_1 = v_1 t = 3.5 = 15\,\mathrm{m}$$

Telesá sa stretnú po 5 s vo vzdialenosti 15 m od počiatočnej polohy prvého telesa.

Príklad 1.10 Vlak prešiel trať 4 km dlhú za 4 minúty, 40 sekúnd a zastavil sa. Vlak sa rozbiehal z pokoja s konštantným zrýchlením, ktoré bolo rovnako veľké ako spomalenie, s ktorým vlak v záverečnej časti trate brzdil. Na strednom úseku trate sa vlak pohyboval s konštantnou rýchlosťou 60 km/h. Aké veľké zrýchlenie mal vlak?

$a_1 = a_2 = a$

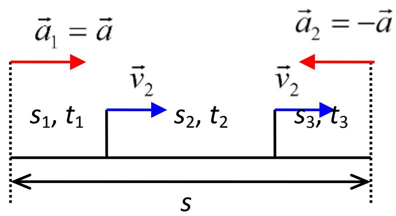
t = 4 min. 40s = 280 s

v_0 = 0 m/s

v_1 = 60 km/h = 16,67 m/s

<u>s = 4 km = 4000 m</u>

a = ?



Obr. 1.8

Riešenie:

Celkovú trať s rozdeľme na 3 úseky s_1, s_2, s_3 (obr. 1.8). Na prvom úseku sa vlak pohyboval rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom so zrýchlením $a_1 = a$, počiatočná rýchlosť je nulová a doba, za ktorú prejde tento úsek je t_1. Potom rýchlosť a dráhu popíšeme rovnicami

$v_1 = at_1$,   (1)

$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ (2).

Na druhom úseku sa pohybuje vlak rovnomerným priamočiarym pohybom, teda koncová rýchlosť vlaku na prvom úseku sa rovná rýchlosti, ktorou sa vlak pohybuje na druhom úseku $v_1 = v_2 = v$. Dráhu s_2 prejde vlak za dobu t_2, potom platí

$s_2 = vt_2$ (3).

Na treťom úseku vlak spomaľuje z rýchlosti v na v_3 = 0 m/s za dobu t_3. Jeho rýchlosť a dráhu na tomto úseku popíšeme rovnicami

$v_3 = v - at_3$ (4),

$s_3 = vt_3 - \frac{1}{2}at_3^2$ (5).

Pre celkovú dráhu a celkovú dobu platí

$s = s_1 + s_2 + s_3$ (6)

$t = t_1 + t_2 + t_3$ (7)

Dosadením (2), (3), (5) do (6) dostaneme $s = \frac{1}{2}at_1^2 + vt_2 + vt_3 - \frac{1}{2}at_3^2$.   (8)

Dobu, za ktorú prejde vlak prvý úsek dráhy vyjadríme z (1) $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{v}{a}$.   (9)

Dobu t_3 vyjadríme z (4), kde v_3 = 0 m/s, $t_3 = \frac{v}{a}$.   (10)

Na určenie doby na druhom úseku použijeme rovnicu (7), z ktorej $t_2 + t_3 = t - t_1$.   (11)

Dosadením (9), (10) a (11) do (8) dostaneme pre dráhu

$$s = \frac{av^2}{2a^2} + vt - vt_1 - \frac{av^2}{2a^2} = vt - \frac{v^2}{a}.$$

Úpravou tejto rovnice vypočítame zrýchlenie

$$a = \frac{v^2}{vt - s} = \frac{(16{,}67)^2}{16{,}67.280 - 4000} = 0{,}416\ \mathrm{m/s^2}\ .$$

Vlak mal na trati zrýchlenie 0,416 m/s^2.

Príklad 1.11 Remeňom sa prenáša otáčavý pohyb z kolesa A s priemerom 50 cm, konajúceho 30 otáčok za minútu, na koleso B s priemerom 25 cm. Akú frekvenciu otáčania má koleso B?

d_1 = 50 cm

f_1 = 30 min^{-1} = 0,5 s^{-1}

d_2 = 25 cm

f_2 = ?

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že kolesá sú navzájom prepojené remeňom, teda majú spoločnú obvodovú rýchlosť, pre ktorú platí

$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$ (1)

Uhlové rýchlosti kolies vyjadríme pomocou vzťahu (1.23)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi f_1, \qquad (2)$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2 \qquad (3)$$

a dosadíme do vzťahu (1). Dostaneme rovnicu

$$r_1 2\pi f_1 = r_2 2\pi f_2$$

Odtiaľ pre frekvenciu kolesa B platí

$$f_2 = \frac{r_1 f_1}{r_2}. \qquad (4)$$

Pre priemery kolies platí $d_1 = 2r_1$ a $d_2 = 2r_2$. Ich dosadením do (4) vypočítame frekvenciu kolesa B.

$$f_2 = \frac{d_1 f_1}{d_2} = \frac{0{,}5.0{,}5}{0{,}25} = 1\,\mathrm{Hz}\,.$$

Frekvencia otáčania kolesa B je 1 Hz.

Dynamika

Príklad 2.1 V silovom poli sa pohybuje častica hmotnosti m = 5 kg po krivke s polohovým vektorom $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, kde A = 1 m.s^{-3}, B = 5 m.s^{-1}, C = - 3 m. Určte hybnosť a silu ako funkcie času a ich veľkosti v časovom okamihu t = 2 s.

m = 5 kg

$\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$

A = 1 m.s^{-3}, B = 5 m.s^{-1}, C = -3 m

p = f (t) = ?, F = f (t) =?

p = ?, F =? ……. t = 2 s

Riešenie:

Použijeme definíciu hybnosti, kde rýchlosť vyjadríme ako deriváciu polohového vektora podľa času

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}\right) = m\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right). \quad (1)$$

Silu vyjadríme z 2. Newtonovho pohybového zákona, do ktorého za hybnosť dosadíme vzťah (1)

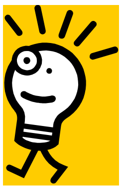
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right)\right] = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right) = m\left(6At\vec{i}\right). \quad (2)$$

Hybnosť a sila vyjadrené ako funkcie času sú dané vzťahmi (1) a (2).

Pre veľkosti vektorov hybnosti a sily v čase 2 s

$$p(t = 2\,\mathrm{s}) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(3At^2m\right)^2 + \left(Bm\right)^2} = \sqrt{\left(3.1.2^2.5\right)^2 + \left(5.5\right)^2} = 65\,\mathrm{kg\ m/s}$$

$$F(t = 2s) = F_x = 6.5.2 = 60\ \mathrm{N}$$



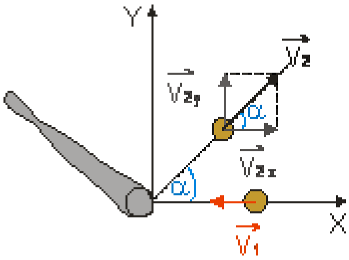
Na vyjadrenie veľkosti hybnosti a sily sme použili poznatok, že veľkosť vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *sa dá vyjadriť pomocou jeho súradníc v tvare*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Veľkosť hybnosti v časovom okamihu 2 s je 65 kg m/s a veľkosť sily 60 N.

Príklad 2.2 Baseballová loptička hmotnosti 140 g letí tesne pred odpálením vodorovne rýchlosťou 39 m/s. Od pálky sa odrazí pod uhlom 30° rýchlosťou 45 m/s. Akou priemernou silou pôsobila pálka na loptičku, ak zrážka prebehla za 1,2 ms?

m = 140 g
v_1 = 39 m/s
v_2 = 45 m/s
α = 30°
t = 1,2 ms
$\overline{F}$ = ?



Obr. 2.1

Riešenie:

Označme rýchlosť loptičky pred odpálením v_1 = 39 m/s, po odpálení v_2 = 45 m/s a silu, ktorú chceme vypočítať $\overline{F}$, uhol pod ktorým sa loptička odrazila α = 30° a jej hmotnosť m = 140 g. Doba zrážky loptičky s pálkou je Δt = 1,2 ms. Na výpočet priemernej (nárazovej) sily použijeme vzťah $I = \overline{F}\Delta t$.

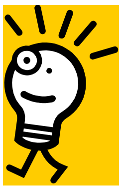
Odtiaľ pre silu

$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} \quad (1).$$

Aby sme mohli vypočítať premennú silu, musíme vedieť hodnotu impulzu a doby, za ktorú zrážka nastala. V našom prípade je impulz daný vektorovým tvarom $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, pretože sa mení smer rýchlosti resp. hybnosti po zrážke. Veľkosť impulzu je potom daný

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}\ , \quad (2)$$

kde veľkosti jednotlivých zložiek impulzu $\vec{I}_x = \vec{p}_{2x} - \vec{p}_{1x} = \Delta\vec{p}_x$, $\vec{I}_y = \vec{p}_{2y} - \vec{p}_{1y} = \Delta\vec{p}_y$, kde $\vec{p}_{1x} = m\vec{v}_{1x}$, $\vec{p}_{2x} = m\vec{v}_{2x}$, $\vec{p}_{1y} = m\vec{v}_{1z}$, $\vec{p}_{2y} = m\vec{v}_{2y}$.



Pri výpočte veľkosti impulzu bol použitý vzťah pre výpočet veľkosti vektora.

Podľa obr. 2.1 vzhľadom na zvolený súradnicový systém
$v_{1x} = -v_1$, $v_{1y} = 0$, $v_{2x} = v_2\cos\alpha$, $v_{2x} = v_2\sin\alpha$.

Potom pre veľkosť zložiek impulzu
$I_x = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x} = mv_2\cos\alpha + mv_1$ (3)
$I_y = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} = mv_2\sin\alpha + m.0$ (4).

Dosadením (3), (4) do (2)

$$I = \sqrt{(mv_2\cos\alpha + mv_1)^2 + (mv_2\sin\alpha)^2} \quad (5)$$

a pre priemernú silu

$$\overline{F} = \frac{\sqrt{(mv_2\cos\alpha + mv_1)^2 + (mv_2\sin\alpha)^2}}{\Delta t}.$$

Použitím číselných hodnôt

$$\overline{F} = \frac{\sqrt{10{,}92^2 + 3{,}15^2}}{0{,}0012} = 9471{,}04\ \text{N}$$

Priemerná sila, ktorou pálka pôsobila na loptičku pri zrážke je približne 9500 N.

Príklad 2.3 Určte prácu vykonanú silou $\vec{F} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$ (N), ktorej pôsobisko sa posúva po krivke $\vec{r} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k}$ (m) v časovom intervale od t_1 = 1 s do t_2 = 5 s.

$$\vec{F} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{r} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k}$$

W = ? .... t_1 = 1 s, t_2 = 5 s

Riešenie:

Využijeme definičný vzťah pre prácu

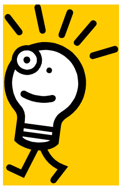
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} \quad (2),$$

pričom na vyjadrenie elementárnej zmeny polohového vektora $\mathrm{d}\vec{r}$ použijeme substitúciu, ktorá vyplynie z derivácie polohového vektora podľa času

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k})}{\mathrm{d}t} = \vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r} = \left(\vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k}\right)\mathrm{d}t. \quad (3)$$

Dosadením (1) a (3) do výrazu pre prácu (2)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}\right).\left(\vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k}\right)\mathrm{d}t. \quad (4)$$



Zložkový tvar skalárneho súčinu dvoch vektorov:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right).\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Urobíme skalárny súčin uvedených dvoch vektorov v zložkovom tvare a integrujeme cez daný časový interval, čím získame veľkosť práce

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (3t^2 + 8t^2 + 45)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{11t^3}{3} + 45t\right]_1^5 = 635\ \text{J}$$

Práca vykonaná silou v danom časovom intervale je 635 J.

Príklad 2.4 Vlak idúci rýchlosťou v_{01} = 60 km.h^{-1} sa zastaví na dráhe s_1 = 400 m. Akú rýchlosť by mal vlak, keby sa rovnakou brzdnou silou zastavil na dráhe s_2 = 100 m?

v_{01} = 60 km.h^{-1},
s_1 = 400 m = 0,4 km.h^{-1},
s_2 = 100 m = 0,1km.h^{-1},
v_2 = ?, $F_1 = F_2$

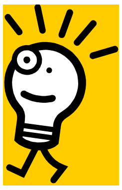
Riešenie:

Na vyjadrenie závislosti dráhy od rýchlosti pre prvý vlak použijeme vetu o kinetickej energii

$$W_1 = E_{k1} - E_{k01}, \quad (1)$$

kde W_1 je práca sily F_1, ktorú vykoná pri zabrzdení vlaku na dráhe s_1. Kinetická energia E_{k1} vlaku na konci pôsobenia sily je nulová (teda v okamihu kedy sa zastaví, rýchlosť je tiež nulová), E_{k01} je jeho kinetická energia na začiatku pôsobenia sily, keď mal pôvodnú rýchlosť v_{01}. Práca sily F_1, ktorá pôsobí proti pohybu a je konštantná sa dá vyjadriť pomocou integrálu v tvare

$$W_1 = \int_0^{s_1} F_1 \mathrm{d}s \cos\alpha = -F_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s = -F_1 s_1 \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) sme využili, že sila brzdila pohyb vlaku, preto pri sile je znamienko – .

Dosadením (2) do (1) pre prvý vlak

$$-F_1 s_1 = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

úpravou

$$F_1 s_1 = \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (3)$$

Analogicky pre druhý vlak bude

$$F_2 s_2 = \frac{1}{2} m v_2^2. \quad (4)$$

Keďže z počiatočných podmienok platí $F_1 = F_2$, predelením rovníc (4) a (3) dostaneme

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2},$$

pre hľadanú rýchlosť

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = 60\sqrt{\frac{0{,}1}{0{,}4}} = 30\ \mathrm{km.hod}^{-1}$$

Rýchlosť vlaku, ktorý by sa zastavil rovnakou brzdnou silou na dráhe 100 m, by bola 30 km.hod^{-1} .

Príklad 2.5 Guľa, preraziac dosku hrúbky h, zmenila svoju rýchlosť z v_0 na v_1. Určte dobu prechodu gule doskou, ak uvažujeme, že sila odporu je úmerná kvadrátu rýchlosti.

h

v_0 .... v_1

$\underline{F = \mathrm{f}\,(v^2)}$

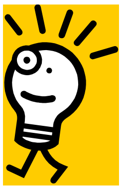
t = ?

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že sila odporu pôsobí proti pohybu a je úmerná druhej mocnine rýchlosti, potom $F = -kv^2$ (1), kde k je konštanta úmernosti.

Na určenie doby, za ktorú guľa prerazí dosku použijeme vzťah pre silu, ktorý upravíme na tvar

$$F\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v\,. \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) predpokladáme, že vektory rýchlosť a sila ležia v jednej priamke, preto stačí vzťah (2) písať bez šípok – vektorov.

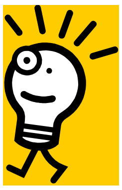
Po dosadení do (2) za silu (1)

$$-kv^2\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v\,. \quad (3)$$

Rovnica (3) predstavuje diferenciálnu rovnicu, ktorú upravíme tak, aby ľavá strana rovnice závisela iba od času a pravá od rýchlosti

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{v^2} \quad (4)$$

a budeme integrovať



Konštanta úmernosti a hmotnosť vo vzťahu (4), sú konštanty, vyberieme ich pred integrál.

$$-\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v_{1v}} \frac{\mathrm{d}v}{v^2}\,,$$

kde t je doba prechodu gule doskou.

Výpočtom dostaneme

$$\left[-\frac{k}{m}t\right]_0^t = \left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v_1}$$

a po dosadení hraníc

$$-\frac{k}{m}t = -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_0} \ .$$

Odkiaľ po úprave pre dobu prechodu gule doskou získame vzťah

$$t = \frac{m}{k}\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1}, \quad (5)$$

v ktorom ešte bude treba určiť konštantu *k*.

Určíme ju pomocou vety o kinetickej energii, ktorú vyjadríme v diferenciálnom tvare

$$F\mathrm{d}s = \mathrm{d}E_\mathrm{k} \ . \quad (6)$$

Dosadením (1) do (6)

$$-kv^2\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v \ .$$

Úpravou rovnice a integrovaním

$$\int_0^h -k\mathrm{d}s = m\int_{v_0}^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{v},$$

dostávame

$$-kh = m\ln\frac{v_1}{v_0} \ .$$

Odkiaľ pre konštantu

$$k = \frac{m}{h}\ln\frac{v_0}{v_1} \ . \quad (7)$$

Dosadením (7) do (5) pre dobu prechodu gule doskou

$$t = \frac{m}{\frac{m}{h}\ln\frac{v_0}{v_1}}\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1} = \frac{h}{v_0 v_1 \ln\frac{v_0}{v_1}}\left(v_0 - v_1\right) \quad (8)$$

Doba prechodu gule doskou je daná vzťahom (8).

Dynamika sústavy hmotných bodov a tuhého telesa

Príklad 3.1 Štyri hmotné body s hmotnosťami m_1 = 2 g, m_2 = 5 g, m_3 = 10 g a m_4 = 7 g sú rozložené v priestore v bodoch A_1 $[-4;2;7]$, A_2 $[-2;-3;-4]$, A_3 $[-4;2;7]$ a A_4 $[1;-4;-6]$, kde súradnice v zátvorke sú udané v centimetroch. Vypočítajte súradnice ťažiska tejto sústavy hmotných bodov.

A_1 $[-4;2;7]$, m_1 = 2 g

A_2 $[-2;-3;-4]$, m_2 = 5 g

A_3 $[-4;2;7]$, m_3 = 10 g

A_4 $[1;-4;-6]$, m_4 = 7 g

---

x_T, y_T, z_T = ?

Riešenie:

Body, ktorých súradnice a hmotnosti sú dané, predstavujú sústavu 4 bodov. Na výpočet súradníc ťažiska tejto sústavy použijeme rovnice, ktoré upravíme pre tejto prípad

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (1)$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (2)$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3).$$

Dosadením za hmotnosti a súradnice jednotlivých bodov do vzťahov (1) – (3) pre súradnice ťažiska sústavy dostávame

$$x_T = \frac{2.(-4) + 5.(-2) + 10.(-4) + 7.1}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{-51}{24} = -2{,}125\,\mathrm{cm}$$

$$y_T = \frac{2.2 + 5.(-3) + 10.2 + 7.(-4)}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{-19}{24} = -0{,}792\,\mathrm{cm}$$

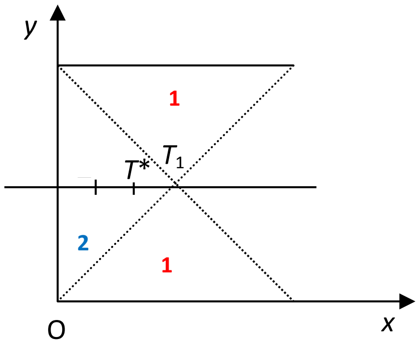
$$x_T = \frac{2.7 + 5.(-4) + 10.7 + 7.(-6)}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{22}{24} = 0{,}917\,\mathrm{cm}$$

Súradnice ťažiska sústavy 4 bodov sú $\boldsymbol{T = [-2{,}125;-0{,}792;0{,}917]\,\mathrm{cm}}$.

Príklad 3.2 Vypočítajte súradnice ťažiska útvaru, ktorý vznikne, keď z homogénneho štvorca zanedbateľnej hrúbky, s dĺžkou strany a, vystrihneme rovnoramenný trojuholník podľa obr. 3.1.

a

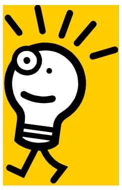
$T = ?$



Obr. 3.1

Riešenie:

Po vystrihnutí trojuholníka zo štvorca, môžeme zvyšok telesa rozdeliť na 3 zhodné rovnoramenné trojuholníky. Dva protiľahlé trojuholníky (nad a pod vodorovnou osou prechádzajúcou bodom T_1) vytvárajú teleso, ktoré má ťažisko v tomto bode. Jeho súradnice v danej súradnej sústave sú $T_1 = \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Tretí trojuholník (číslo 2) má ťažisko v bode $T_2 = \left[\frac{1}{3}.\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] = \left[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right]$.



Ťažisko v rovnoramennom trojuholníku leží v 1/3 tretine výšky trojuholníka. Preto x-ová súradnica ťažiska T_2 je a/6, kde a/2 je výška trojuholníka č.2.

Ak označíme hmotnosť jedného trojuholníka m, potom ťažisko hľadaného útvaru T^* nájdeme ako ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov. Prvý je v bode T_1 a jeho hmotnosť je $2m$, druhý je v bode T_2 a jeho hmotnosť je m.

Súradnice ťažiska T^* vypočítame pomocou vzťahu

$$x^* = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m\frac{a}{2} + m\frac{a}{6}}{2m + m} = \frac{7}{18}a\,,$$

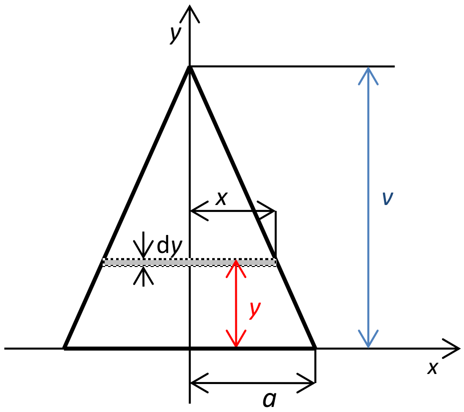
$$y^* = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m\frac{a}{2} + m\frac{a}{2}}{2m + m} = \frac{1}{2}a\,.$$

Ťažisko daného útvaru má súradnice $T^* = \left[\frac{7a}{18}, \frac{a}{2}\right]$.

Príklad 3.3 Vypočítajte polohu ťažiska homogénnej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ (obr. 3.2).

a,b

$T = ?$



Obr. 3.2

Riešenie:

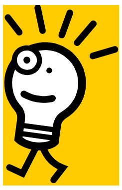
V tomto prípade nemôžeme dosku nahradiť sústavou hmotných bodov ako v predchádzajúcom príklade. Musíme sa na ňu dívať ako na teleso, ktorého súradnice ťažiska vypočítame pomocou vzťahov, ktoré platia pre teleso (v integrálnom tvare). Zvolíme si súradnicový systém, do ktorého dosku umiestnime tak, aby bola symetrická podľa osi y. Zo symetrie vyplýva (obr. 3.2), že počítame iba y - ovú súradnicu ťažiska, pretože x – ová súradnica je rovná nule. Potom

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m = 0$$

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m}\int y\,\mathrm{d}m\,, \quad (1)$$

kde dm predstavuje hmotný element (veľmi malá časť telesa tejto hmotnosti), na výpočet ktorého použijeme plošnú hustotu

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} = \frac{m}{S}\,. \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) je dS obsah hmotného elementu, ktorý si v príkladoch volíme. S a m predstavujú obsah a hmotnosť celej dosky.

Hmotný element vyberieme v tvare pásika rovnobežného s osou x, ktorého dS určíme ako obsah obdĺžnika dS = $2x\mathrm{d}y$ (3). Obsah dosky je S = ½.2av (4).Úpravou vzťahu (2) a dosadením za plochy vzťahy (3) a (4) hmotnosť hmotného elementu je

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{av}2x\mathrm{d}y\,. \quad (5)$$

Súradnicu x vyjadríme cez premennú y pomocou podobnosti trojuholníkov pri odvesnách a, v vzhľadom k odvesnám x, $(v-y)$

$$x = \frac{a}{v}(v-y), \text{ resp. } x = a\left(1-\frac{y}{v}\right) \quad (6)$$

Potom dosadením (5) a (6) do (1) y – ová súradnica ťažiska

$$y^* = \frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int y\frac{m}{av}2x\mathrm{d}y = \frac{2}{av}\int_0^v a\left(1-\frac{y}{v}\right)y\mathrm{d}y = \frac{2}{v}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3v}\right]_0^v = \frac{1}{3}v = \frac{1}{3}\sqrt{b^2-a^2}\,.$$

Súradnice ťažiska sú $\boldsymbol{T = \left[0; \frac{1}{3}\sqrt{b^2-a^2}\right]}$**.**

Príklad 3.4 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l, prierezu S a hmotnosti m vzhľadom na os kolmú na smer dĺžky a) prechádzajúcu koncovým bodom tyče, b) prechádzajúcu stredom tyče.

l, m -

I = ?

Riešenie:

a) Moment zotrvačnosti je daný vzťahom $I = \int r^2\mathrm{d}m$ (1), kde r je vzdialenosť hmotného elementu od osi otáčania. Tyč umiestnime na os x – ovú tak, aby os otáčania bola totožná s osou y – ovou. Za hmotný element *dm* si zvolíme časť dĺžky tyče dĺžky dx. Jeho vzdialenosť od osi otáčania označíme x (r = x). Ak predpokladáme, že tyč má zanedbateľný prierez, potom na výpočet hmotnosti hmotného elementu použijeme dĺžkovú hustotu

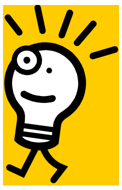
$$\tau = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} = \frac{m}{l}\,, \quad (2)$$

kde m a l sú hmotnosť a dĺžka tyče a dl = dx. Pre hmotný element

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x\,. \quad (3)$$

Dosadením (2), (3) do (1) a úpravou

$$I = \int x^2\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{1}{3}ml^2\,.$$



Pri integrovaní sa posúvame hmotným elementom od jedného konca tyče na druhý koniec, preto integruje v hraniciach od 0 po l.

b) Ak os otáčania prechádza stredom tyče, potom na výpočet použijeme ten istý postup. Integrujeme v hraniciach od – l/2 po l/2

$$I = \int x^2\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) = \frac{1}{3}\frac{m}{l}2\frac{l^3}{8} = \frac{1}{12}ml^2$$

Pri počítaní sme mohli v tomto prípade použiť aj Steinerovu vetu.

Moment zotrvačnosti tyče je a) $\boldsymbol{I = \frac{1}{3} ml^2}$ a b) $\boldsymbol{I = \frac{1}{12} ml^2}$.

Príklad 3.5 Vypočítajte moment zotrvačnosti kruhovej dosky hmotnosti m = 2 kg a polomeru R = 10 cm vzhľadom na os prechádzajúcu a) stredom dosky kolmo na rovinu dosky a b) bodom vo vzdialenosti x = 5 cm od stredu dosky, kolmo na rovinu dosky. Hrúbku dosky zanedbajte.

m = 2 kg
R = 10 cm = 0,1 m

---

a) I_0 = ?
b) I_1 = ?, x = 5 cm = 0,05 m

Riešenie:

a) Na výpočet momentu zotrvačnosti použijeme opäť vzťah $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ (1).

Kruhovú dosku umiestnime do roviny xy, tak, aby os otáčania bola totožná s osou z – ovou, potom elementárnu hmotnosť telesa môžeme vyjadriť pomocou plošnej hustoty v tvare

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{S}\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \;(2), \text{ kde } S \text{ je plocha kruhovej dosky }, \; r \in \langle 0, R\rangle \text{ a } \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle .$$

Dosadením (2) do (1)

$$I_0 = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2}\int\int r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} 2\pi$$

$$I_0 = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} 2.0{,}1^2 = 0{,}01 \mathrm{kgm}^2$$

b) Ak os otáčania prechádza bodom vo vzdialenosti x od stredu (ťažiska) kruhovej dosky potom podľa Steinerovej vety

$$I_1 = I_0 + mx^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mx^2 = 0{,}01 + 2.0{,}05^2 = 0{,}015 \mathrm{kgm}^2 .$$

Moment zotrvačnosti kruhovej dosky je a) $\boldsymbol{I_0 = 0{,}01 \mathrm{kgm}^2}$ a b) $\boldsymbol{I_1 = 0{,}015 \mathrm{kgm}^2}$.

Príklad 3.6 Vypočítajte moment zotrvačnosti dutého valca vzhľadom na jeho geometrickú os. Hmotnosť valca je m = 3,3 kg, výška valca je h, vnútorný a vonkajší polomer je R_1 = 0,12 m a R_2 = 0,23 m.

m = 3,3 kg
R_1 = 0,12 m
R_2 = 0,23 m
I = ?

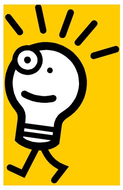
Riešenie:

Moment zotrvačnosti telesa vypočítame pomocou vzťahu

$$I = \int r^2 dm\,, \quad (1)$$

kde hmotnostný element dm je tvorený množinou bodov s rovnakou vzdialenosťou r od osi rotácie. V našom prípade je to súosový dutý valec polomeru $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ nekonečne malej hrúbky dr, pre ktorého hmotnosť platí

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h} h 2\pi r \mathrm{d}r\,. \quad (2)$$



Na výpočet hmotnosti hmotného elementu sme použili objemovú hustotu $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{m}{V}$.

Potom dosadením (2) do (1)

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_{R1}^{R2} r^2 \frac{m}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2m}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \int_{R1}^{R2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{2m}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R1}^{R2} = \frac{m}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right).$$

Po číselnom dosadení

$$I = \frac{3{,}3}{2}\left(0{,}12^2 + 0{,}23^2\right) = 873\,\mathrm{kg.m}^2$$

Moment zotrvačnosti dutého valca je 873 kgm^2.

Príklad 3.7 Vagón naložený pieskom hmotnosti m_1 = 50 ton, sa pohybuje priamočiarym rovnomerným pohybom po vodorovnej rovine rýchlosťou v_1 = 5 m/s. Oproti nemu ide prázdny vagón hmotnosti m_2 = 20 ton rýchlosťou v_2 = 20 m/s. Po náraze sa vagóny spoja. Ako sa budú pohybovať po zrážke?

m_1 = 50 ton
m_2 = 20 ton
v_1 = 5 m/s
v_2 = 20 m/s

$v_3 = ?$

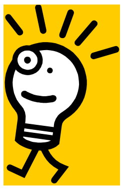
Riešenie:

Po zrážke sa vagóny spoja a vytvoria sústavu (jeden celok), ktorá bude mať hmotnosť $m = m_1 + m_2$ a rýchlosť $\vec{v}_3$. Na výpočet tejto rýchlosti, použijeme zákon zachovania hybnosti, podľa ktorého sa celková hybnosť sústavy pred zrážkou ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2$) rovná celkovej hybnosti po zrážke ($\vec{p}_3$)

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3\,. \quad (1)$$

Dosadením za hybnosti vagónov (vektor $\vec{p}_1$ predstavuje hybnosť prvého vagóna a vektor $\vec{p}_2$ hybnosť druhého vagóna pred zrážkou)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3. \quad (2)$$



Pri úprave vzťahu (2) využijeme poznatok, že vagóny sa pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom. Stačí uvažovať len veľkosti rýchlostí, preto rovnicu (2) zapíšeme bez vektorov (bez šípok). Súčasne zohľadníme fakt, že druhý vagón sa pohybuje opačným smerom ako prvý, pomocou znamienka mínus.

Úpravou rovnice (2)

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_3.$$

Odtiaľ pre hľadanú rýchlosť

$$v_3 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{50000.5 - 20000.20}{50000 + 20000} = -2{,}14\ \mathrm{m/s}\,.$$

Rýchlosť po zrážke vagónov je 2,14 m/s. Znamienko mínus znamená, že po zrážke sa vagóny budú pohybovať v smere pohybu prázdneho vagóna, teda opačným smerom ako sa pohybuje plný vagón.

Príklad 3.8 Do akej výšky sa z rovnovážnej polohy vychýli matematické kyvadlo hmotnosti m_2 = 10 kg, keď v ňom uviazne strela hmotnosti m_1 = 100 g letiaca rýchlosťou v_1 = 200 m/s? Aké množstvo energie sa pri zrážke premení na teplo?

m_1 = 100 g = 0,1 kg
m_2 = 10 kg
v_1 = 200 m/s
v_2 = 0

---

h = ?
Q = ?

Riešenie:
Matematické kyvadlo a strela predstavujú sústavu dvoch bodov, pre ktorú platí zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania mechanickej energie. Po uviaznutí strely, sa sústava s hmotnosťou $m = m_1 + m_2$ bude pohybovať rýchlosťou v, pričom na začiatku predpokladáme, že daná sústava sa nachádza v nulovej výške (polohou strely je vedená nulová potenciálna hladina). Po vychýlení kyvadla do maximálnej výšky h jej rýchlosť klesne na 0. Na vyjadrenie výšky h, do ktorej sa sústava vychýli použijeme zákon zachovania energie

$$E_0 = E_1,$$

kde indexom nula je vyjadrená energia sústavy po zrážke so strelou a indexom jedna energia vo výške h. Celková energia je daná ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

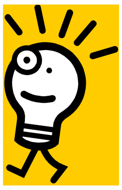
$$E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}}, \quad (1)$$

kde $E_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{2}mv^2$ (2), $E_{\mathrm{p1}} = mgh$ (3) a $E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{k1}} = 0\ \mathrm{J}$ (4).

Dosadením (2), (3), (4) do (1)

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

Odtiaľ pre výšku do ktorej sa kyvadlo sa vychýli $h = \frac{v^2}{2g}$. (5)



Rýchlosť, ktorá vystupuje vo vzťahu (5) je iná ako rýchlosť v_1, ktorú mala strela pred zrážkou. Rýchlosť strely sa po zrážke zmenší.

Rýchlosť v sústavy nepoznáme. Na jej určenie použijeme zákon zachovania hybnosti izolovanej sústavy

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3,$$

kde vektor $\vec{p}_1$ predstavuje hybnosť strely a vektor $\vec{p}_2$ hybnosť matematického kyvadla pred zrážkou a vektor $\vec{p}_3$ hybnosť sústavy strela + kyvadlo po zrážke. Potom dosadením za jednotlivé hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 0 = (m_1 + m_2)v$$

a úpravou pre rýchlosť sústavy po zrážke

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Dosadením (6) do (5) pre výšku h

$$h = \frac{(m_1 v_1)^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{(0{,}1.200)^2}{2.9{,}81(0{,}1+10)^2} = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

Množstvo energie, ktoré sa premení na teplo v dôsledku práce odporovej sily pri zabrzdení strely v kyvadle je dané rozdielom kinetickej energie strely pred zrážkou a kinetickej energie kyvadla po zrážke

$$Q = W = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2}0{,}1.200^2\left(1 - \frac{0{,}1}{0{,}1+10}\right) = 1980{,}2\ \mathrm{J}$$

Matematické kyvadlo sa vychýli do výšky 0,2 m. Množstvo energie, ktoré sa premení na teplo pri zrážke je 1980,2 J.

Príklad 3.9 Tyč hmotnosti m = 2 kg a dĺžky l = 1 m je uložená na vodorovnej osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Akou rýchlosťou prejde druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou, keď tyč pustíme z najvyššej polohy?

m = 2 kg
l = 1 m

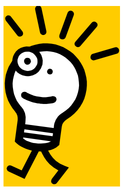
---

v_1 = ?

Riešenie:
Na vyjadrenie rýchlosti v najnižšej polohe použijeme zákon zachovania mechanickej energie.
Zvoľme za nulovú potenciálnu hladinu vodorovnú rovinu prechádzajúcu osou otáčania. Vzhľadom na ňu pre potenciálnu energiu tyče v najvyššej polohe

$$E_{p0} = \int gx\mathrm{d}m = \frac{mg}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x = \frac{mg}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2}mgl\,. \quad (1)$$

V najnižšej polohe $E_{\mathrm{p}1} = -\frac{1}{2}mgl\,.$ (2)



Tyč predstavuje teleso, ktoré má rovnomerne rozloženú hmotnosť pozdĺž svojej dĺžky. Preto na výpočet potenciálnej energie koncového bodu nemôžeme použiť vzťah, ktorý platí pre jeden bod ako to bolo v predchádzajúcom príklade, ale integrálny tvar, vzťah (1).

Tyč pri vychýlení zo svojej hornej polohy do dolnej vykonáva otáčavý pohyb, ktorého kinetická energia závisí od momentu zotrvačnosti a uhlovej rýchlosti (pozri vzťah 4). V najvyššej polohe je tyč v pokoji $E_{\mathrm{k}0} = 0$ (3) a v najnižšej polohe $E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$ (4), kde $I = \frac{1}{3}ml^2$ (5) je moment zotrvačnosti tyče, ak os prechádza koncovým bodom tyče (pozri príklad 3.4a).

Medzi uhlovou rýchlosťou ω a rýchlosťou v platí vzťah $v = \omega R$. V tomto prípade R = l potom pre uhlovú rýchlosť $\omega_1 = \frac{v_1}{l}$ (6).

Použitím zákona zachovania mechanickej energie

$$E_0 = E_1,$$

kde indexom nula je vyjadrená energia tyče v najvyššej polohe a indexom jedna energia v najnižšej polohe. Celková energia je daná ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

$$E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{k}0} = E_{\mathrm{p}1} + E_{\mathrm{k}1}\,. \quad (7)$$

Dosadením (1) - (6) do (7)

$$\frac{1}{2}mgl + 0 = -\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v_1}{l}\right)^2$$

a úpravou pre rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{6gl} = \sqrt{6.9{,}81.1} = 7{,}67 \text{ m/s} .$$

Rýchlosť, ktorou prejde druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou je v_1 = 7,67 m/s.

Príklad 3.10 Homogénna kruhová doska polomeru R = 0,3 m a hmotnosti m = 60 kg sa otáča pod vplyvom momentu síl M = 0,1 Nm. Vypočítajte uhlové zrýchlenie a prácu vonkajších síl v čase t = 3 min, ak v čase t = 0 bola doska v pokoji. Moment zotrvačnosti kruhovej dosky vzhľadom na os otáčania je $I = \frac{1}{2}mR^2$ (1).

m = 60 kg
M = 0,1 Nm
R = 0,3 m

ε, W = ? .... t = 3 min

Riešenie:
Uhlové zrýchlenie kruhovej dosky vyjadríme z pohybovej rovnice telesa rotujúceho okolo pevnej osi

$$M = \varepsilon I$$
$$\varepsilon = \frac{M}{I} , \quad (2)$$

kde za moment zotrvačnosti dosadíme vzťah (1). Po úprave a číselnom dosadení

$$\varepsilon = \frac{2M}{mR^2} = \frac{2.0{,}1}{60.0{,}3^2} = 0{,}037 \text{ s}^{-1} .$$

Prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri roztočení kruhovej dosky z pokoja vypočítame pomocou vety o kinetickej energii

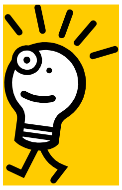
$$W = E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k , \quad (3)$$

kde kinetická energia na začiatku je nulová a kinetická energia v čase 3 minúty je $E_{k1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$.
Dosadením do vzťahu (3)

$$W = \frac{1}{2}I\,\omega_1^2 - 0 . \quad (4)$$

Uhlovú rýchlosť v čase 3 minúty vyjadríme pomocou uhlovej rýchlosti $\omega_1 = \varepsilon t_1$ a dosadíme do (4).
Úpravou a použitím vzťahu (1)

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2(\varepsilon t_1)^2 = \frac{1}{4}60.0{,}3^2(0{,}037.180)^2 = 60 \text{ J} .$$



Uhlové zrýchlenie dosky je 0,0037 s^{-1}, je teda konštantné. Na základe tohto poznatku vieme aký pohyb doska vykonáva. V tomto prípade ide o rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb okolo pevnej osi.

Uhlové zrýchlenie dosky v čase 3 minúty je 0,037 s^{-1} a práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily za tento čas je 60 J.

Kmity a vlny

Príklad 4.1 Vypočítajte dobu kmitu T netlmeného harmonického kmitavého pohybu častice hmotnosti $m = 10$ g, ak sila udržujúca časticu v tomto pohybe má pri výchylke $x_1 = 3$ cm hodnotu $F_1 = 0{,}05$ N.

$m = 10 \text{ g} = 0{,}01 \text{ kg}$

$x_1 = 3 \text{ cm} = 0{,}03 \text{ m}$

$F_1 = 0{,}05 \text{ N}$

$T = ?$

Riešenie:

Pre dobu kmitu netlmeného harmonického kmitavého pohybu platí podľa vzťahu

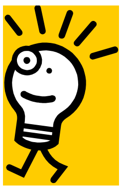
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (1)$$

Na vyjadrenie k vo vzťahu (1) použijeme vzťah $F = kx$ ktorého

$$k = \frac{F_1}{x_1} . \quad (2)$$

Dosadením (2) do (1) potom pre dobu kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_1}{F_1}} . \quad (3)$$



Vzťah (2) sme vyjadrili bez znamienka mínus, pretože nás zaujíma veľkosť pružnej sily a nie jej smer.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}01.0{,}03}{0{,}05}} = 0{,}5 \text{ s}$$

Doba kmitu netlmeného harmonického kmitavého pohybu častice je 0,5 s.

Príklad 4.2 Určte amplitúdu a fázovú konštantu netlmeného harmonického pohybu častice, ak v čase $t_0 = 0$ s bola výchylka $x_1 = 5$ cm a rýchlosť $v_1 = 20 \text{ cms}^{-1}$, frekvencia pohybu je 1 s^{-1}.

$t_0 = 0$ s: $x_1 = 0{,}05$ s (1), $v_1 = 0{,}2 \text{ ms}^{-1}$ (2)

$A = ?$, $\varphi = ?$

Riešenie:

Na výpočet amplitúdy a fázovej konštanty použijeme vzťah pre výchylku a rýchlosť. Vzťah pre výchylku hmotného bodu $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (3), upravíme na jednoduchší tvar použitím počiatočných podmienok. V $t_0 = 0$ s platí podmienka (1), ktorú dosadíme do (3)

$x_1 = A\cos(\omega.0 + \varphi)$. Úpravou $x_1 = A\cos\varphi$ (4).

Rýchlosť odvodíme pomocou výchylky $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ (5). Použitím počiatočných podmienok, pre časový okamih $t_0 = 0$ s, platí podmienka (2). Po jej dosadení do (5) a úpravou pre rýchlosť $v_1 = -A\omega\sin\varphi$ (6).

Ak do rovnice (6) dosadíme za kruhovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$, dostávame dve rovnice pre dve neznáme A a φ

$x_1 = A\cos\varphi$ (7)

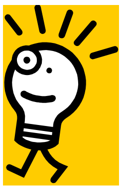
$v_1 = -2\pi f A\sin\varphi$ (8).

Rovnicu (8) upravíme na tvar $\frac{v_1}{-2\pi f} = A\sin\varphi$ (9). Amplitúdu získame pomocou rovníc (7) a (9), ktoré umocníme a sčítame. Odtiaľ pre amplitúdu

$$A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{-2\pi f}\right)^2}\,. \quad (10)$$

Fázovú konštantu vypočítame zo vzťahu

$$tg\,\varphi = \frac{v_1}{2\pi f x_1}\,. \quad (11)$$



Pri výpočte fázovej konštanty sme rovnicu (9) delili rovnicou (7). Odtiaľ sme získali vzťah (11).

Po číselnom dosadení do rovníc (10) a (11) získame φ = - 32,5°, A = 0,059 m = 5,9 cm.

Fázová konštanta netlmeného harmonického pohybu častice je - 32,5° a amplitúda je 5,9 cm.

Príklad 4.3 Aký je pomer potenciálnej a kinetickej energie harmonicky kmitajúcej častice v časovom okamihu t = T/8? Riešte úlohu pri počiatočných podmienkach: pre $t_0 = 0$ s výchylka z rovnovážnej polohy $x_0 = A$ a rýchlosť $v = 0$.

$t_0 = 0$ s: $x_0 = A$ (1), $v_1 = 0$ (2)

E_p / E_k = ? .... $t = T/8$ s

Riešenie:

Na vyjadrenie podielu energií, najprv odvodíme vzťah pre potenciálnu a kinetickú energiu. Potenciálna energia hmotného bodu s výchylkou x pri uvedených počiatočných podmienkach

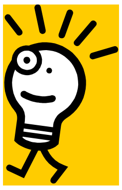
$$E_p = -\int F.\mathrm{d}x = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \ .$$

Kinetická energia s rýchlosťou v (vzťah (5) z príkladu 4.2)

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \ A^2 \sin^2 \omega t \ .$$

Potom pre podiel energii

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t}{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t} = \mathrm{cotg}^2 \frac{2\pi}{T}t = \mathrm{cotg}^2 \frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} = \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi}{4} = 1 \quad (3)$$



Pri výpočte sme vo vzťahu (3) za kruhovú frekvenciu dosadili $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

V časovom okamihu T/8 s je potenciálna energia kmitajúcej častice práve rovná jej kinetickej energii.

Príklad 4.4 Pri tlmenom harmonickom kmitavom pohybe sa po dvoch za sebou idúcich výchylkách hmotného bodu na tú istú stranu amplitúda kmitov zmenšila o 6/10, doba kmitu je 0,5 s. Určte koeficient útlmu b a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok.

$\Delta A = 6/10\ A_1$

$T_1 = 0{,}5$ s

$b = ?,\ f = ?$

Riešenie:

Označme prvú tlmenú amplitúdu A_1 a druhú tlmenú amplitúdu A_2. Potom $\Delta A = A_1 - A_2 = \frac{6}{10} A_1$. Odtiaľ úpravou pre druhú amplitúdu

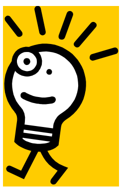
$$A_2 = A_1 - \frac{6}{10} A_1 = \frac{4}{10} A_1 \text{ (1).}$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že podiel dvoch za sebou idúcich výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu vyjadruje útlm, pre ktorý platí

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} = e^{bT_1} \text{ (2).}$$

Potom dosadením (1) do (2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{4} = e^{bT_1}$ (3). Úpravou pre koeficient útlmu

$$b = \frac{1}{T_1} \ln \frac{10}{4} = \frac{1}{0{,}5} \ln \frac{10}{4} = 1{,}83\,\mathrm{s}^{-1}.$$



Pri výpočte koeficientu útlmu sme rovnicu (3) matematicky upravili pomocou inverznej funkcie ku exponenciálnej funkcii, teda pomocou logaritmu.

Na vyjadrenie kruhovej frekvencie netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok použijeme vzťah $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$, v ktorom ω je kruhová frekvencia netlmeného harmonického kmitavého pohybu. Potom

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - b^2},$$

kde za kruhovú frekvenciu tlmeného kmitavého pohybu dosadíme $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ a za kruhovú frekvenciu netlmeného kmitavého pohybu dosadíme $\omega = 2\pi f$. Potom

$$2\pi f = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_1^2} - b^2}.$$

Frekvencia netlmeného kmitavého pohybu

$$f=\frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_1^2}-b^2}}{2\pi}=\frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{0{,}5^2}-1{,}83^2}}{2\pi}=2{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$$

Koeficient útlmu je 1,83 s^{-1} a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok je 2,02 s^{-1}.

Príklad 4.5 Logaritmický dekrement tlmených harmonických kmitov je 0,02. Koľkokrát sa zmenší amplitúda po 100 kmitoch?

$\delta = 0{,}02$

$t_1 = 100\ T_1$

$\lambda = ?$

Riešenie:

Na určenie koľkokrát sa zmenší amplitúda po 100 kmitoch použijeme vzťah pre útlm, ktorý vyjadríme ako podiel prvej a stej amplitúdy

$$\lambda = \frac{A_1}{A_{100}} \quad (1).$$

Prvá tlmená amplitúda sa mení s časom podľa vzťahu $A_1 = A_0 e^{-bt}$ (2), kde A_0 je amplitúda netlmeného harmonického kmitavého pohybu. Medzi prvou a druhou tlmenou amplitúdou je časový posun o jednu periódu T_1. Potom $A_2 = A_0 e^{-b(t+T_1)}$. Pre stú amplitúdu platí, že nastane za $t_1 = 100\ T_1$. Potom $A_{100} = A_0 e^{-b(t+100T_1)}$ (3). Dosadením (2) a (3) do (1)

$$\frac{A_1}{A_{100}} = \frac{A_0 e^{-bt}}{A_0 e^{-b(t+100T_1)}} = e^{b.100T_1} = e^{100\delta} \ (4),$$

kde sme využili, že $bT_1 = \delta$.

Po dosadení číselných hodnôt do (4)

$$\frac{A_1}{A_{100}} = e^{100.0,2} = e^2 = 7{,}4\,.$$

Po sto kmitoch sa amplitúda zmenší 7,4 - krát.

Príklad 4.6 Vlnenie sa šíri od zdroja rýchlosťou v = 300 ms^{-1}, amplitúda A = 5 cm, vlnová dĺžka λ = 75 cm. Koľko času prejde od vzniku vlnenia po okamih, kedy častica nachádzajúca sa vo vzdialenosti x = 50 cm od zdroja sa vychýli o 2,5 cm? Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom $u(0,t) = A\sin\omega t$.

v = 300 ms^{-1}

A = 0,05 m

λ = 0,75 m
x = 0,5 m
u = 0,025 m

---

t = ?

Riešenie:

Na vyjadrenie výchylky častice použijeme vzťah $u(x,t) = A\sin 2\pi\left(ft \mp \frac{x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t \mp kx)$, kde dosadíme $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Zo zadania vyplýva, že vlnenie sa šíri od zdroja v kladnom smere osi x. Potom vo vzťahu pre výchylku bude vystupovať znamienko mínus

$u(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$ (1). Pre vlnovú dĺžku platí $\lambda = vT$ (2).

Dosadením (2) do (1)

$$u(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Odtiaľ úpravou pre dobu t, za ktorú sa častica vychýli o 2,5 cm od zdroja

$$t = T\left(\frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{u}{A} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (3).$$

Ak vo vzťahu (3) vyjadríme periódu pomocou vlnovej dĺžky použitím vzťahu (2) pre hľadaný časový okamih

$$t = \frac{\lambda}{v}\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{u}{A}\right) = \frac{x}{v} + \frac{\lambda}{2\pi v}\arcsin\frac{u}{A}$$

Po číselnom dosadení

$$t = \frac{0{,}05}{300} + \frac{0{,}75}{2\pi 300}\arcsin\frac{0{,}025}{0{,}05} = 0{,}0019\,\text{s}$$

Doba, za ktorú sa častica vychýli o 2,5 cm od zdroja je 0,0019 s.

Náuka o teple

Príklad 5.1 Koľko molekúl je v guľovej nádobe polomeru 3 cm, naplnenej kyslíkom (M = 32.10^{-3} kg.mol^{-1}), keď jeho teplota je 27 °C a tlak 133.10^{-4} Pa?
(R = 8,314 JK^{-1} mol^{-1}, N_A = 6,022.10^{23} mol^{-1})

r = 0,03 m
T = 300 K
p = 133. 10^{-4} Pa

N = ?

Riešenie:

Počet molekúl možno vyjadriť, ak poznáme počet mólov n, zo vzťahu $n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$

$N = nN_A$ (1).

Počet mólov vyjadríme zo stavovej rovnice $pV = nRT$

$$n = \frac{pV}{RT} \quad (2),$$

kde pre objem guľovej nádoby platí

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (3).$$

Potom dosadením (2) a (3) do (1) pre počet molekúl dostávame

$$N = \frac{p4\pi r^3}{3RT}N_A = \frac{4.\pi.133.10^{-4}.0{,}03^3}{3.8{,}314.300}6{,}022.10^{23} = 3{,}63.10^{14}$$

V guľovej nádobe je 3,63.10^{14} molekúl kyslíka.

Príklad 5.2 Vypočítajte, aká je vnútorná energia m = 10 g dusíka teploty 30 °C. Aká časť tejto energie pripadá na postupný a aká na rotačný pohyb molekúl?
(M = 28.10^{-3} kgmol^{-1}, R = 8,314 JK^{-1} mol^{-1})

m = 0,01 kg
T = 303 K

U = ?

Riešenie:

Vnútorná energia plynu, ktorý obsahuje *n* mólov je daná vzťahom

$$U = n\frac{i}{2}RT \quad , \quad (1)$$

kde počet stupňov voľnosti $i = 5$, keďže ide o dvojatómový plyn.

Počet mólov plynu vyjadríme pomocou vzťahu $n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}}$, dosadením do (1) dostávame

$$U = \frac{m}{M}\frac{5}{2}RT = \frac{0{,}01}{28.10^{-3}}\frac{5}{2}8{,}314.303 = 2250\ \mathrm{J}$$

Pretože z piatich stupňov voľnosti tri pripadajú na postupný pohyb (v smeroch troch súradnicových osí) a dva na rotačný pohyb (otáčanie okolo osi činky nemení súradnice). Energia postupného pohybu bude vyjadrená rovnakým vzťahom, kde $i = 3$,

$$U_{\mathrm{post}} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{0{,}01}{28.10^{-3}}\frac{3}{2}8{,}314.303 = 1350\ \mathrm{J}\ .$$

Energia pripadajúca na rotačný pohyb ($i = 2$) je

$$U_{\mathrm{rot}} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{0{,}01}{28.10^{-3}}\frac{2}{2}8{,}314.303 = 900\ \mathrm{J}\ .$$

Vnútorná energia 10 g dusíka teploty 30 °C je 2250 J. Na postupný pohyb z nej pripadá 1350 J energie a na rotačný pohyb 900 J.

Príklad 5.3 Vypočítajte, ako sa zmení stredná kinetická energia molekúl argónu ($M = 40.10^{-3}$ kg.mol^{-1}), ktorého hmotnosť $m = 200$ g, keď pri zachovaní stáleho objemu mu dodáme $Q = 3516$ J tepla. ($N_{\mathrm{A}} = 6{,}022.10^{23}$mol^{-1})

$m = 0{,}2$ kg
$Q = 3516$ J
$V =$ konšt.

$\Delta\varepsilon = ?$

Riešenie:

Keďže ide o izochorickú zmenu (V = konšt., dV = 0), podľa vzťahu $\mathrm{d}W' = p\mathrm{d}V$ objemová práca plynu je nulová. Potom podľa prvej vety termodynamickej

$Q = \Delta U + \Delta W'$, celé dodané teplo (ktoré je konštantné) sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu

$Q = \Delta U$.   (1)

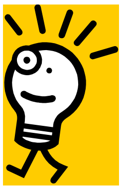
Zmenu vnútornej energie vyjadríme pomocou vzťahu

$\Delta U = n\frac{i}{2}R\Delta T$.   (2)

Vzťah (2) upravíme na tvar

$\Delta U = n\frac{i}{2}kN_A\Delta T = nN_A\Delta\varepsilon$,   (3)

kde výraz pre $\Delta\varepsilon$ vyplýva zo vzťahu $\varepsilon = \frac{i}{2}kT$ a $R = k\,N_A$.



Pri vyjadrení vzťahu (3) sme využili, že Boltzmanova konštanta k je daná vzťahom $k = \frac{R}{N_A}$.

Potom po dosadení za počet mólov $n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ do (3) a využitím podmienky (1)

$Q = \frac{m}{M}N_A\Delta\varepsilon$.

Úpravou pre zmenu strednej kinetickej energie

$$\Delta\varepsilon = \frac{QM}{mN_A} = \frac{3516.40.10^{-3}}{0{,}2.6{,}022.10^{23}} = 1{,}16.10^{-21}\ \text{J}$$

Stredná kinetická energia molekúl argónu sa zmení o 1,16.10^{-21} J.

Príklad 5.4 Vypočítajte, o koľko stupňov sa ohreje súš pri mori, ak jej dodávame rovnaké teplo ako moru. Hmotnostná tepelná kapacita súše je 5 – krát menšia ako hmotnostná tepelná kapacita mora.

$c_s = \frac{c_m}{5}$ (1)

$\Delta T_s = ?$

Riešenie:

Pre hmotnostnú tepelnú kapacitu súše platí vzťah v tvare

$$c_{\mathrm{s}} = \frac{1}{m}\left(\frac{Q}{\Delta T_{\mathrm{s}}}\right).$$

Úpravou pre zmenu teploty súše

$$\Delta T_{\mathrm{s}} = \frac{1}{m}\frac{Q}{c_{\mathrm{s}}}. \quad (2)$$

Pre hmotnostnú tepelnú kapacitu mora

$$c_{\mathrm{m}} = \frac{1}{m}\left(\frac{Q}{\Delta T_{\mathrm{m}}}\right).$$

Odtiaľ pre teplo, ktoré dodáme 1 kg morskej vody, aby sa ohriala o jeden stupeň

$$Q = mc_{\mathrm{m}}\Delta T_{\mathrm{m}}. \quad (3)$$

Zo zadania vyplýva, že súši dodáme rovnaké teplo ako moru. Potom dosadením (3) do (2)

$$\Delta T_{\mathrm{s}} = \frac{1}{m}\frac{mc_{\mathrm{m}}\Delta T_{\mathrm{m}}}{c_{\mathrm{s}}}$$

a využitím podmienky (1) pre zmenu teploty súše

$$\Delta T_{\mathrm{s}} = \frac{1}{m}\frac{mc_{\mathrm{m}}\Delta T_{\mathrm{m}}}{\frac{c_{\mathrm{m}}}{5}} = 5\Delta T_{\mathrm{m}}.$$

Teplom, ktorým ohrejeme kilogram morskej vody o 1 stupeň, ohrejeme rovnaké množstvo súše o 5 stupňov. Preto je leto pri mori omnoho miernejšie ako vo vnútrozemí, pretože morská voda ochladzuje pevninu. V zime naopak treba moru dodať veľa tepla, aby sa ochladilo na rovnakú teplotu ako súš. Preto sú zimy pri mori menej studené ako vo vnútrozemí. More ohrieva pevninu.

Príklad 5.5 Vzduch s hmotnosťou 1 kg a teplotou 0 °C sme stlačili z tlaku 0,1 MPa na desaťnásobný tlak. Vypočítajte, akú prácu na to potrebujeme, keď stláčanie prebieha: a) izotermicky, b) adiabaticky. (c_V = 728 Jkg^{-1}K^{-1}, κ = 1,40)

m = 1 kg
T = 273 K
P_1= 0,1 MPa
P_2 = 1 MPa

W = ?

Riešenie:

a) Pre izotermický dej platí, že T = konšt. (dT = 0, d$\underline{U}$ = 0),. Potom celá vykonaná práca podľa prvej vety termodynamickej (5.7) sa premení na teplo plynom odovzdané

$$\mathrm{d}Q = 0 + \mathrm{d}W' \Rightarrow \quad \mathrm{d}Q = \mathrm{d}W'.$$

Pre objemovú prácu plynu platí

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V . \quad (1)$$

Závislosť tlaku od objemu vyjadríme zo stavovej rovnice $pV = nRT$ v tvare $p = \frac{nRT}{V}$,

kde n, R aj T sú konštanty. Dosadením do (1)

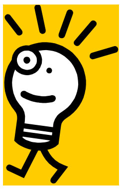
$$W' = nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln\frac{V_2}{V_1} .$$

Keďže poznáme tlaky a nie objemy, využijeme na vyjadrenie podielu objemov súvis objemu a tlaku pri izotermickom deji $p_1V_1 = p_2V_2$, odkiaľ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Potom práca

$$W' = nRT \ln\frac{p_1}{p_2} . \quad (2)$$

Na vyjadrenie počtu mólov, použijeme vzťah $n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_\mathrm{A}}$ a súčin nR vyjadríme

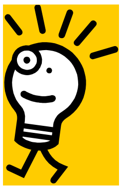
$$nR = \frac{m}{M}R = m\left(c_p - c_V\right) = mc_V\left(\kappa - 1\right). \quad (3)$$



Pri úprave vzťahu (3) sme využili, vzťahy $c_p = c_V + \frac{R}{M}$ *a* $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V}$*, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi hmotnostnými tepelnými kapacitami.*

Dosadením (3) do (2)

$$W' = mc_V(\kappa - 1)T \ln\frac{p_1}{p_2} = 1.728.(1{,}4-1).273.\ln\frac{0{,}1}{1} = -183000\ \mathrm{J}$$



Prácu plynu označujeme W′ a prácu, ktorú koná okolie na plyne W. Platí W′ = - W. Ak plyn koná prácu dW′> 0, nastáva expanzia (rozpínanie) plynu. Ak koná prácu okolie dW> 0, nastáva kompresia (stláčanie) plynu.

Keďže plynom vykonaná práca vyšla záporná a platí, že dodaná práca sa rovná záporne vzatej vykonanej práci, v tomto prípade, aby sme plyn stlačili, bolo treba vykonať prácu 183 kJ.

b) Pre adiabatický dej platí dQ = 0. Potom z prvej vety termodynamickej v tomto prípade vyplýva, že dodaná práca spôsobí árast vnútornej energie plynu

$$0 = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W' \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{d}W' = \mathrm{d}U$$

Zaujíma nás práca, ktorú vykonáme pri stlačení plynu, teda $-\mathrm{d}W' = \mathrm{d}W$. Potom práca, ktorú vykonáme

$$W = U = \int_{T_1}^{T_2} mc_V\,\mathrm{d}T = mc_V(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Keďže konečná teplota nie je daná, vyjadríme ju pomocou súvisu objemu a tlaku pri adiabatickom deji z Poissonovej rovnice $pV^\kappa = \mathrm{kost}$

$$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa . \quad (2)$$

Zo stavovej rovnice vyjadríme objemy pomocou tlaku a teploty

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}, \quad (3)$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2}. \quad (4)$$

Dosadením za neznáme objemy (3) a (4) do (2)

$$p_1\left(\frac{nRT_1}{p_1}\right)^{\kappa} = p_2\left(\frac{nRT_2}{p_2}\right)^{\kappa}$$, odkiaľ úpravou pre konečnú teplotu

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} T_1. \quad (5)$$

Dosadením (5) do (1) pre prácu

$$W = mc_V T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] = 1.728.273\left[\left(\frac{1}{0,1}\right)^{0,4} - 1\right] = 185000 \text{ J}$$

Na adiabatické stlačenie plynu potrebujeme vykonať prácu 185 kJ.

Príklad 5.6 Vypočítajte ako sa zmení entropia m = 2 g dusíka, keď ho zohrejeme z teploty t_0 = 0 °C na teplotu t_1 = 30 °C izobaricky. (c_V = 741 $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, κ = 1,41)

T_0 = 273 K

T_1 = 303 K

m = 0,002 kg

ΔS = ?

Riešenie:

Pre zmenu entropie platí vzťah

$$\Delta S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}. \quad (1)$$

Zmenu tepla, ktoré vystupuje v rovnici (1) vyjadríme z prvej vety termodynamickej

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W' = mc_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V, \quad (2)$$

kde za zmenu vnútornej energie a zmenu práce sme dosadili vzťahy

$$\mathrm{d}U = nC_V\mathrm{d}T = mc_V\mathrm{d}T, \ \mathrm{d}W' = p\mathrm{d}V \cdot$$

Keďže nepoznáme zmenu objemu dV, na jeho vyjadrenie využijeme stavovú rovnicu, ktorú budem diferencovať

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T \cdot \quad (3)$$

Zmena entropie nám zaujíma pri izobarickom deji (p=konš., dp = 0) potom z rovnice (3)

$$p\mathrm{d}V = nR\mathrm{d}T \cdot \quad (4)$$

Dosadením (4) do (2) zmena tepla

$$\mathrm{d}Q = mc_V\mathrm{d}T + nR\mathrm{d}T \quad (5)$$

Za súčin nR dosadíme do (5) vzťah, ktorý sme odvodili v príklade 5.5

$$nR = mc_V(\kappa - 1) \cdot$$

Potom

$$\mathrm{d}Q = mc_V\mathrm{d}T + mc_V(\kappa - 1)\mathrm{d}T = mc_V\kappa\mathrm{d}T \quad (6)$$

Zmena entropie po dosadení (6) do (1)

$$\Delta S = mc_V\kappa\int_{T_0}^{T_1}\frac{\mathrm{d}T}{T} = mc_V\kappa\ln\frac{T_1}{T_0} = 0{,}002.741.1{,}41.\ln\frac{303}{273} = 0{,}217\ \mathrm{JK}^{-1}$$

Zmena entropie pri izobarickom deji je 0,217 J/K.