

**Technická univerzita v Košiciach**

**Zbierka riešených a neriešených úloh  
z matematiky**

**pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach**

**Martin Bača – Ján Buša – Andrea Feňovčíková  
Zuzana Kimáková – Denisa Olekšáková – Štefan Schrötter**

**Košice 2011**

**Recenzovali:** prof. RNDr. Dušan Knežo, CSc.  
doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc.  
prof. RNDr. Ján Plavka, CSc.

ISBN 978-80-553-0813-5

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.  
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.  
Spracované programom pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

---

© Martin Bača, Ján Buša, Andrea Feňovčíková, Zuzana Kimáková,  
Denisa Olekšáková, Štefan Schrötter, 2011

# Predhovor

Milí mladí priatelia,

táto učebná pomôcka je určená vám – uchádzačom o štúdium na fakultách Technickej univerzity v Košiciach. Kým na Ekonomickej fakulte a Fakulte umení sa už tradične konajú prijímacie skúšky, na ostatných fakultách bude v roku 2012 novou súčasťou prijímacieho konania písomný test z matematiky. Cieľom tohto testu je overiť *základné vedomosti zo stredoškolskej matematiky*. Zbierka, ktorú práve držíte v rukách, pokrýva tie oblasti matematiky, ktoré budú v testoch obsiahnuté a jej prvoradým poslaním je umožniť vám dobre sa na tento vstupný test pripraviť. Vedeniu univerzity a fakúlt, ako aj autorskému kolektívu, ide však najmä o to, aby ste sa tým súčasne dobre pripravili aj na základný kurz vysokoškolskej matematiky v prvom roku štúdia.

Zbierka pozostáva z 15 kapitol. V úvode každej kapitoly sú vyriešené vzorové príklady, pričom výklad obsahuje aj poznatky z teórie, potrebné na vyriešenie úloh. Druhou časťou každej kapitoly je spravidla 20 neriešených úloh. *Písomné testy v rámci prijímacieho konania budú zostavované výlučne z úloh uvedených v tejto zbierke.*

Na konci zbierky sú uvedené správne odpovede ku všetkým neriešeným úlohám, rozčlenené podľa kapitol.

Veríme, že dva vzorové testy, zostavené z úloh v zbierke, pomôžu čitateľom získať reálnu predstavu o náročnosti testov. Ich výsledky neuvádzame, pozorný čitateľ ich nájde medzi uvedenými odpoveďami. Na vypracovanie testu (t. j. na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí) bude mať uchádzač k dispozícii 90 minút.<sup>1</sup> V každej úlohe je správna len jedna z uvedených odpovedí. Za správnu odpoveď uchádzač získa 10 bodov, za nesprávnu odpoveď stratí 3 body. Za nevyplnenú odpoveď sa započíta 0 bodov.

Sme presvedčení, že každý uchádzač, ktorý samostatne vyrieši úlohy v tejto zbierke, nielen úspešne napíše vstupný test, výrazne si zvýši celkový bodový zisk a bude prijatý, ale vytvorí si súčasne veľmi dobrú východiskovú pozíciu pre úspešný vstup do štúdia na Technickej univerzite v Košiciach. Prácu s touto zbierkou preto považujte za investíciu do svojej budúcnosti – k tomu vám prajeme veľa trpezlivosti a pevnej vôle.

Chceli by sme sa poďakovať recenzentom, prof. RNDr. Dušanovi Knežovi, CSc., doc. RNDr. Božene Mihalíkovej, CSc. a prof. RNDr. Jánovi Plavkovi, CSc., za starostlivé prečítanie textu a množstvo pripomienok a návrhov, ktoré prispeli ku skvalitneniu tejto zbierky.

V Košiciach, 11. 11. 2011

autori

---

<sup>1</sup>V zbierke uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

# Obsah

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Zlomky</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1       | Riešené príklady  | 6         |
| 1.2       | Úlohy   | 10        |
| <b>2</b>  | <b>Výrazy</b>   | <b>13</b> |
| 2.1       | Riešené príklady  | 13        |
| 2.2       | Úlohy   | 17        |
| <b>3</b>  | <b>Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav</b>                                | <b>19</b> |
| 3.1       | Riešené príklady  | 19        |
| 3.2       | Úlohy   | 24        |
| <b>4</b>  | <b>Riešenie lineárnych nerovnic a nerovnic v súčinovom a podielovom tvare</b> | <b>27</b> |
| 4.1       | Riešené príklady  | 27        |
| 4.2       | Úlohy   | 32        |
| <b>5</b>  | <b>Riešenie rovníc a nerovnic obsahujúcich výrazy v absolútnej hodnote</b>    | <b>34</b> |
| 5.1       | Riešené príklady  | 34        |
| 5.2       | Úlohy   | 39        |
| <b>6</b>  | <b>Funkcie (základné vlastnosti, graf)</b>                                    | <b>41</b> |
| 6.1       | Riešené príklady  | 41        |
| 6.2       | Úlohy   | 46        |
| <b>7</b>  | <b>Funkcie (základné vlastnosti, definičný obor a obor funkčných hodnôt)</b>  | <b>49</b> |
| 7.1       | Riešené príklady  | 49        |
| 7.2       | Úlohy   | 54        |
| <b>8</b>  | <b>Riešenie kvadratických rovníc</b>  | <b>56</b> |
| 8.1       | Riešené príklady  | 56        |
| 8.2       | Úlohy   | 61        |
| <b>9</b>  | <b>Exponenciálne výrazy a logaritmy</b>                                       | <b>63</b> |
| 9.1       | Riešené príklady  | 63        |
| 9.2       | Úlohy   | 67        |
| <b>10</b> | <b>Priamka, polpriamka a úsečka v rovine</b>                                  | <b>69</b> |
| 10.1      | Riešené príklady  | 69        |
| 10.2      | Úlohy   | 75        |
| <b>11</b> | <b>Kuželosečky</b>  | <b>77</b> |
| 11.1      | Riešené príklady  | 77        |
| 11.2      | Úlohy   | 86        |
| <b>12</b> | <b>Riešenie jednoduchých goniometrických rovníc</b>                           | <b>88</b> |
| 12.1      | Riešené príklady  | 88        |
| 12.2      | Úlohy   | 93        |
| <b>13</b> | <b>Aritmetické a geometrické postupnosti</b>                                  | <b>95</b> |
| 13.1      | Riešené príklady  | 95        |
| 13.2      | Úlohy   | 100       |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>14</b> | <b>Riešenie základných úloh geometrie <math>n</math>-uholníkov</b> | <b>102</b> |
| 14.1      | Riešené príklady . . . . .   | 102        |
| 14.2      | Úlohy . . . . .  | 108        |
| <b>15</b> | <b>Percentá</b>  | <b>114</b> |
| 15.1      | Riešené príklady . . . . .   | 114        |
| 15.2      | Úlohy . . . . .  | 120        |
| <b>16</b> | <b>Výsledky úloh</b>   | <b>122</b> |
| <b>17</b> | <b>Vzorové testy</b>   | <b>123</b> |
|           | <b>Použitá literatúra</b>  | <b>127</b> |

# 1 Zlomky

## 1.1 Riešené príklady

---

---

1. Číslo  $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$  je z intervalu:

A:  $\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \rangle$  B:  $(\frac{2}{3}; 1)$  C:  $(1; \frac{4}{3})$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

A  B   
C  D

**Riešenie.** Úpravou na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5}{30} = \frac{20 + 12 - 5}{30} = \frac{27}{30} = \frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 10} = \frac{9}{10}.$$

Platí

$$\frac{2}{3} < \frac{9}{10} < 1,$$

teda B je správna odpoveď.

---

---

2. Číslo  $\frac{5}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$  je:

A: väčšie ako  $\frac{5}{3} - \frac{5}{4}$  B: menšie ako  $\frac{5}{3} - \frac{5}{2}$  C: rovné  $2 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{5}{6} - \frac{5}{8})$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

A  B   
C  D

**Riešenie.** Upravíme zlomky na spoločného menovateľa:

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{12} = \frac{30 - 20 - 15}{12} = -\frac{5}{12}.$$

Číslo

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{12} = \frac{20 - 15}{12} = \frac{5}{12}.$$

Keďže číslo  $\frac{5}{12}$  je väčšie ako  $-\frac{5}{12}$ , odpoveď A nie je správna.

Odpoveď B nie je správna, pretože

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{6} = \frac{10 - 15}{6} = -\frac{5}{6} = -\frac{10}{12} < -\frac{5}{12}.$$

Odpoveď C je správna, pretože

$$2 \cdot \left( \frac{5}{4} - \frac{5}{6} - \frac{5}{8} \right) = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{24} = 2 \cdot \frac{30 - 20 - 15}{24} = 2 \cdot \left( -\frac{5}{24} \right) = -\frac{5}{12}.$$

---

---

3. Číslo  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1$  je z intervalu:

A  B   
C  D

A:  $\langle -1; \frac{1}{3} \rangle$  B:  $\langle 1; 2 \rangle$  C:  $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Úpravou zlomkov na spoločného menovateľa získame

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 = \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 12}{12} = \frac{3 - 10 + 12}{12} = \frac{5}{12}.$$

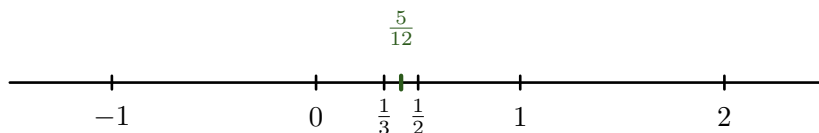
Platí

$$0 < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

teda správna odpoveď je C.

**Poznámka.** Odpoveď A nie je správna, pretože  $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$ . Odpoveď B nie je správna, pretože  $0 < \frac{5}{12} < \frac{12}{12} = 1$ .

Na nasledujúcom obrázku je znázornená číselná os s vyznačenými číslami, ktoré vystupujú v zadaní úlohy.



---

---

4. Číslo  $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 2$  je:

A  B   
C  D

A: menšie ako 1 B: väčšie ako 2 C: väčšie ako  $\frac{7}{2}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Zlomky upravíme na spoločného menovateľa:

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 20}{20} = \frac{8 - 15 + 40}{20} = \frac{33}{20} = \frac{20 + 13}{20} = \frac{20}{20} + \frac{13}{20} =$$

$$= 1 + \frac{13}{20} \begin{cases} > 1 \Rightarrow \text{odpoveď A nie je správna,} \\ < 2 \Rightarrow \text{odpoveď B nie je správna,} \\ < \frac{7}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{odpoveď C nie je správna.} \end{cases}$$

Teda správna odpoveď je D.

---



---

5. Číslo  $\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}$  je:

A  B   
C  D

A: menšie ako  $-\frac{2}{3}$  B: väčšie ako  $-\frac{1}{3}$  C: rovné  $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

**Riešenie.** Upravíme zložený zlomok na jednoduchý tvar úpravou na spoločného menovateľa:

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{12}}{\frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{6}} = \frac{\frac{9 - 10}{12}}{\frac{4 - 3}{6}} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{1} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Pretože

$$-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3},$$

tak ani odpoveď A, ani odpoveď B nie sú správne.

Odpoveď C nie je správna, pretože

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1}{12} = \frac{9 - 2 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}.$$

Teda správna odpoveď je D.

---



---

6. Číslo  $\frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{2}}{-\frac{4}{3} + 1}$  je:

A  B   
C  D

A: väčšie ako  $-2$  B: väčšie ako  $-5$  C: menšie ako  $-4$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

**Riešenie.** Zložený zlomok upravíme na jednoduchý tvar:

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{2}}{-\frac{4}{3} + 1} = \frac{\frac{1 + 3 \cdot 3}{6}}{\frac{-4 + 1 \cdot 3}{3}} = \frac{\frac{1 + 9}{6}}{\frac{-4 + 3}{3}} = \frac{\frac{10}{6}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) = -\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 1} = -5 < -4,$$

teda správna odpoveď je C.

---



---

7. Číslo  $-1,5$  je:

A  B   
C  D

A: väčšie ako  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$  B: menšie ako  $-\frac{7}{3}$  C: rovné  $\frac{1}{3} - \frac{11}{6}$  D: rovné  $\frac{2}{5} - \frac{7}{4}$

**Riešenie.** Desatinné číslo prepíšeme na zlomok, ktorý následne upravíme na základný tvar:

$$-1,5 = -\frac{15}{10} = -\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = -\frac{3}{2}.$$

- Keďže súčin dvoch kladných čísel je číslo kladné, odpoveď A nie je správna.

- Odpoveď B nie je správna, pretože

$$-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3} < -2 < -1,5.$$

Teda číslo  $-1,5$  je väčšie ako  $-\frac{7}{3}$ .

- Správna odpoveď je C, pretože

$$\frac{1}{3} - \frac{11}{6} = \frac{1 \cdot 2 - 11}{6} = \frac{2 - 11}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

- Poznamenajme, že odpoveď D nie je správna, pretože

$$\frac{2}{5} - \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{20} = \frac{8 - 35}{20} = -\frac{27}{20} \neq -1,5.$$

8. Číslo  $2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)$  je:

A: väčšie ako  $\frac{1}{4}$     B: menšie ako  $\frac{1}{6}$     C: rovné  $-\frac{2}{3} + \frac{7}{15} + \frac{2}{5}$     D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A     B   
C     D

**Riešenie.** Úpravou na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 5}{30} = 2 \cdot \frac{10 + 18 - 25}{30} = 2 \cdot \frac{3}{30} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Pretože  $4 < 5 < 6$ , tak  $\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ , a teda odpovede A a B nie sú správne.

Keďže

$$-\frac{2}{3} + \frac{7}{15} + \frac{2}{5} = \frac{-2 \cdot 5 + 7 + 2 \cdot 3}{15} = \frac{-10 + 7 + 6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{3}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5},$$

odpoveď C je správna.

## 1.2 Úlohy

---

1. Číslo  $-3 + \frac{2}{3} - \frac{0}{4}$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $-\frac{5}{2}$  B: väčšie ako  $-\frac{8}{3}$  C: rovné  $-\frac{1}{3}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

2. Číslo  $1,4 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4}$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako 1 B: rovné 1 C: väčšie ako 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

3. Číslo  $\frac{5}{4} - \frac{5}{6} - 1$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $-\frac{1}{2}$  B: väčšie ako  $-\frac{1}{2}$  C: väčšie ako  $-\frac{1}{3}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

4. Číslo  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\langle \frac{7}{6}; \frac{4}{3} \rangle$  B:  $\langle -1; 1 \rangle$  C:  $\langle 1; \frac{7}{6} \rangle$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

5. Číslo  $\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{5}$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\langle -\frac{1}{7}; \frac{1}{7} \rangle$  B:  $\langle \frac{1}{6}; \frac{1}{5} \rangle$  C:  $\langle \frac{1}{6}; \frac{1}{5} \rangle$  D:  $\langle \frac{1}{7}; \frac{1}{6} \rangle$
- 

6. Číslo  $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$  B:  $\langle 1; \frac{3}{2} \rangle$  C:  $\langle \frac{3}{2}; 2 \rangle$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

7. Číslo  $3 \cdot \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $\frac{1}{6}$  B: väčšie ako 0,2 C: rovné  $\frac{1}{9}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

8. Číslo  $3 \cdot (2,17 - 1,29 - 0,8)$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $\frac{3}{13}$  B: rovné  $\frac{6}{25}$  C: väčšie ako  $\frac{2}{7}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

9. Číslo  $4 \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \right)$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$  B:  $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$  C:  $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$  D:  $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$
-

10. Číslo  $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\left(1; \frac{7}{5}\right)$  B:  $\left\langle \frac{6}{5}; 2 \right\rangle$  C:  $\left(\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right)$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

11. Číslo  $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) : 2$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$  B:  $\left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle$  C:  $\langle 0; 1 \rangle$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

12. Číslo  $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)$  je: A  B   
C  D   
A: rovné  $-0,75$  B: väčšie ako  $-\frac{1}{2}$  C: rovné  $-\frac{1}{4}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

13. Číslo  $3 \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right) - 2 \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right)$  je z intervalu: A  B   
C  D   
A:  $\left\langle -1; -\frac{1}{4} \right\rangle$  B:  $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$  C:  $\left\langle -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right\rangle$  D:  $\left\langle -\frac{1}{5}; 0 \right\rangle$
- 

14. Číslo  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}$  je: A  B   
C  D   
A: rovné  $-\frac{23}{7}$  B: menšie ako  $-\frac{31}{10}$  C: väčšie ako  $-\frac{23}{8}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

15. Číslo  $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $\frac{1}{5}$  B: väčšie ako  $\frac{1}{4}$  C: väčšie ako  $\frac{3}{7}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

16. Číslo  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{-\frac{3}{6}}$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $-2,3$  B: menšie ako  $-2,1$  C: väčšie ako  $-2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

17. Číslo  $-0,25$  je: A  B   
C  D   
A: menšie ako  $\frac{3}{2} - \frac{7}{3}$  B: väčšie ako  $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$  C: rovné  $\frac{5}{4} - 4$  D: rovné  $2 - \frac{9}{4}$

---

18. Číslo  $\frac{13}{7}$  je:

A: menšie ako  $2 + \frac{5}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$  B: rovné  $\frac{11}{5} - \frac{5}{11}$  C: väčšie ako  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

A  B   
C  D

19. Číslo  $\frac{7}{13}$  je:

A: väčšie ako  $2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$  B: rovné  $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$  C: menšie ako  $\frac{7}{15}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

A  B   
C  D

20. Číslo 0,2 je:

A: rovné  $\frac{8}{15} - \frac{1}{3}$  B: väčšie ako  $\frac{1}{4}$  C: rovné  $\frac{19}{20} - \frac{1}{4}$  D: menšie ako  $\frac{1}{2} - 1$

A  B   
C  D

## 2 Výrazy

### 2.1 Riešené príklady

Pri riešení príkladov v tejto kapitole budeme používať tieto vzorce

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (2.1)$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2, \quad (2.2)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B). \quad (2.3)$$

Ďalej využijeme, že pre  $a, b \geq 0$  je

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (2.4)$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}. \quad (2.5)$$

---

---

1. Výraz  $\frac{x+4}{x^2-49}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné:

A: -4; 7    B: 7    C: -7; -4; 7    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

A     B   
C     D

**Riešenie.** Daný výraz nie je definovaný, keď sa menovateľ zlomku rovná nule, teda ak

$$x^2 - 49 = 0.$$

Rozložme kvadratický dvojčlen na súčin. Využijeme vzorec (2.3), t. j.

$$(x - 7)(x + 7) = 0.$$

Súčin dvoch výrazov sa rovná nule, ak aspoň jeden z výrazov je rovný nule. Odtiaľ

$$\begin{aligned} x - 7 = 0 & \quad \vee \quad x + 7 = 0, \\ x = 7 & \quad \vee \quad x = -7. \end{aligned}$$

Výraz nie je definovaný pre  $x = \pm 7$ , preto je správna odpoveď D.

---

---

2. Výraz  $\frac{(3x+3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x)}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné:

A: -1; 2    B: -3; 0; 3    C: -3; 3    D: -2; 1

---

A     B   
C     D

**Riešenie.** Daný výraz nie je definovaný, keď sa jeho menovateľ rovná nule, teda ak

$$(x - 3)(x^2 + 3x) = 0.$$

Po jednoduchej úprave rovnice dostávame

$$(x - 3)x(x + 3) = 0.$$

Súčin troch činiteľov sa rovná 0, ak aspoň jeden z nich je rovný 0. Teda, ak

$$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0,$$

t. j.

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -3.$$

Daný výraz nie je definovaný pre hodnoty  $x = -3$ ,  $x = 0$  a  $x = 3$ , a preto B je správna odpoveď.

---

---

3. Výraz  $\frac{9x - x^3}{x - 2}$  je rovný nule pre  $x$  rovné:

A:  $-3; 3$  B:  $0; 3$  C:  $2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A  B   
C  D

**Riešenie.** Zlomok môže byť rovný nule len vtedy, ak je jeho čitateľ rovný nule. V našom prípade platí

$$\frac{9x - x^3}{x - 2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x - x^3 = 0.$$

Rozložme dvojčlen  $9x - x^3$  na súčin. Najprv vyberme  $x$  pred zátvorku a potom na základe vzorca (2.1) dostaneme

$$9x - x^3 = x(9 - x^2) = x(3 - x)(3 + x).$$

Pôvodná rovnica má takto tvar

$$x(3 - x)(3 + x) = 0.$$

Súčin troch činiteľov sa rovná nule, ak aspoň jeden z nich je rovný nule, t. j.

$$x = 0 \quad \vee \quad 3 - x = 0 \quad \vee \quad 3 + x = 0,$$

a teda

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3.$$

Daný zlomok je definovaný pre každú z týchto hodnôt, preto je správna odpoveď D.

Poznamenajme, že daný zlomok nie je definovaný pre  $x = 2$ .

---

---

4. Výraz  $\frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + 2}{x - 1}$  je rovný nule pre  $x$  rovné:

A:  $-1; 1$  B:  $-2; 2$  C:  $0; 1; 2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A  B   
C  D

**Riešenie.** Je potrebné vyriešiť rovnicu

$$\frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + 2}{x - 1} = 0. \quad (2.6)$$

Podľa vzorca (2.1) platí  $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$ . Úpravou ľavej strany rovnice na najmenšieho spoločného menovateľa dostávame

$$\frac{3\sqrt{x} + 3 - 3\sqrt{x} + 3 - x^2 - 2}{x - 1} = 0,$$

$$\frac{4 - x^2}{x - 1} = 0.$$

Posledná rovnica platí, ak je čitateľ zlomku rovný nule:

$$4 - x^2 = 0$$

a podľa vzorca (2.1) máme

$$(2 - x)(2 + x) = 0.$$

Súčin výrazov je rovný nule, ak aspoň jeden z nich je rovný nule. V našom prípade, ak  $2 - x = 0$  alebo  $2 + x = 0$ , teda ak  $x = 2$  alebo  $x = -2$ . Preto odpoveď B je správna.

---

---

5. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  pre  $a = 43$ ,  $b = 41$  je:

A  B   
C  D

A: 84 B: 42 C: 21 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Úpravou na spoločný menovateľ sčítame zlomky a použitím vzorcov (2.1), (2.2) a (2.3) dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b + a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \\ &= \frac{2a + 2b}{a - b} = \frac{2(a + b)}{a - b}. \end{aligned}$$

Ak  $a = 43$ ,  $b = 41$ , tak

$$\frac{2(a + b)}{a - b} = \frac{2(43 + 41)}{43 - 41} = \frac{2 \cdot 84}{2} = 84.$$

Správna odpoveď je A.

---

---

6. Hodnota výrazu  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{z} - \sqrt{x}}$  pre  $x = 6$ ,  $z = 2$  je:

A  B   
C  D

A:  $-\sqrt{3} - 3$  B:  $3 - \sqrt{3}$  C:  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Dosadíme do daného výrazu  $x = 6$  a  $z = 2$  a využime vzorce (2.1), (2.4) a (2.5):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{z} - \sqrt{x}} \right]_{\substack{x=6 \\ z=2}} &= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \left\{ \text{výraz rozšírime vhodnou jednotkou } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 1 \right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{12} + 2 \cdot 6}{2 - 6} = -\frac{2\sqrt{4}\sqrt{3} + 12}{4} = -\frac{2 \cdot 2\sqrt{3} + 12}{4} = -\frac{4\sqrt{3} + 12}{4} = \\ &= -\frac{4(\sqrt{3} + 3)}{4} = -(\sqrt{3} + 3) = -\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

Správna odpoveď je A.

---

---

7. Hodnota výrazu  $\left(\frac{4}{3+\sqrt{8}} + 4\sqrt{8}\right)^2$  je:

A  B   
C  D

A: 144 B: 121 C:  $\frac{121}{9}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Pri úpravách použijeme vzorec (2.4)

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3+\sqrt{8}} + 4\sqrt{8}\right)^2 &= \left[\frac{4+4\sqrt{8}(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{4+4\sqrt{8}\cdot 3+4\sqrt{8}\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{4+12\sqrt{8}+4\cdot 8}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \\ &= \left[\frac{4+12\sqrt{8}+32}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{36+12\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \left[\frac{12\cdot 3+12\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = \\ &= \left[\frac{12(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}}\right]^2 = 12^2 = 144.\end{aligned}$$

Správna je odpoveď A.

---

---

8. Hodnota výrazu  $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)^3$  je:

A  B   
C  D

A:  $\sqrt{35}$  B: 36 C: 216 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Využívajúc vzorec (2.1) upravíme výraz v zátvorke na spoločného menovateľa

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\right)^3 &= \left[\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{5}) - \sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\right]^3 = \\ &= \left[\frac{7+\sqrt{7}\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{7} + 5}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\right]^3 = \left(\frac{7+5}{7-5}\right)^3 = 6^3 = 216.\end{aligned}$$

Správna odpoveď je C.

## 2.2 Úlohy

---

1. Výraz  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -2; -1; 1; 2 B: -2; 1; 2 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

2. Výraz  $\frac{x - 5}{x^2 - 25}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -5 B: -5; 5 C: 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

3. Výraz  $\frac{x - 3}{x^2 - 3}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -3; 3 B:  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$  C:  $\sqrt{3}$  D: 3
- 

4. Výraz  $\frac{(x - 2)(x - 3)x}{(x^2 - 2x)(x - 3)^2}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: 3 B: 2; 3 C: 0; 2; 3 D: -3; 0; 2; 3
- 

5. Výraz  $\frac{2x - 5}{(4x - x^2)(x + 5)}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -5; 0; 4 B: -4; 0; 5 C: 0; 4; 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

6. Výraz  $\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x)(x - 2)}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -2; 0; 2 B: -2; 2 C: -1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

7. Výraz  $\frac{(5x - 1)(2 - x^2)}{(3 - x^2)(x + 3)}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A:  $-\sqrt{2}$ ;  $\frac{1}{5}$ ;  $\sqrt{2}$  B:  $-\sqrt{2}$ ;  $-\frac{1}{5}$ ;  $\sqrt{2}$  C:  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ; 3 D: -3;  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$
- 

8. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$  pre  $x = 3$ ,  $y = 2$  je: A  B   
C  D   
A: 1 B:  $\frac{1}{5}$  C:  $5 - 2\sqrt{6}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

9. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$  pre  $x = 5$ ,  $y = 10$  je: A  B   
C  D   
A:  $\sqrt{2} - 1$  B:  $1 - \sqrt{2}$  C:  $\frac{\sqrt{2} + 1}{5}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

10. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$  pre  $x = 33$ ,  $y = 31$  je: A  B   
C  D   
A: 16 B: 32 C: 64 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

- 
11. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} + \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}}$  pre  $x = 11, y = 7$  je: A  B   
C  D   
A: 5 B: 10 C:  $\frac{32}{3}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

12. Hodnota výrazu  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$  pre  $x = 19, y = 17$  je: A  B   
C  D   
A: -18 B:  $-\frac{1}{18}$  C:  $\frac{1}{18}$  D: 18
- 

13. Hodnota výrazu  $\left(\frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{y}\right)^2$  pre  $x = 1, y = 2$  je: A  B   
C  D   
A: 0 B:  $6 - 4\sqrt{2}$  C:  $\frac{2}{3}$  D:  $6 + 4\sqrt{2}$
- 

14. Hodnota výrazu  $\sqrt{2\sqrt{5} - \frac{2}{2 + \sqrt{5}}}$  je: A  B   
C  D   
A: 1 B: 2 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

15. Výraz  $\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1}$  je rovný nule pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -1 B: 0 C: 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

16. Výraz  $\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2} - \frac{x+3}{x^2-4}$  je rovný nule pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -1 B: 0 C: 1 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

17. Výraz  $\frac{x^2+x}{x-3} + \frac{16+x}{3-x}$  je rovný nule pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -4; 4 B: 3 C: 3; 4 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

18. Výraz  $\frac{x^2+8}{x-2} - \frac{2}{4-2x}$  je rovný nule pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A: -3; 3 B: 2 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

19. Výraz  $\frac{x+2}{3+x} + \frac{x-2}{3-x}$  je rovný: A  B   
C  D   
A:  $\frac{2x}{x^2-9}$  B:  $\frac{2x}{9-x^2}$  C:  $\frac{2-x}{9-x^2}$  D:  $\frac{2+x}{x^2-9}$
- 

20. Výraz  $\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{x-4}$  je rovný: A  B   
C  D   
A:  $\frac{3x}{x-4}$  B:  $\frac{2x\sqrt{x}-x}{x-4}$  C:  $\frac{5x}{x-4}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

## 3 Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav

### 3.1 Riešené príklady

---

---

1. Počet koreňov rovnice  $\frac{3x+2}{x+4} + 4 = \frac{8x+22}{x+4}$  v množine reálnych čísel je:

A: 0   B: 1   C: 2   D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A    B   
C    D

**Riešenie.** Zlomky v danej rovnici majú zmysel pre

$$x + 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -4.$$

Pri riešení rovnice najprv odstránime zlomky a ďalšími ekvivalentnými úpravami vyjadríme neznámu  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x+4} + 4 &= \frac{8x+22}{x+4}, & / \cdot (x+4) \\ 3x+2+4(x+4) &= 8x+22, \\ 3x+2+4x+16 &= 8x+22, \\ 7x+18 &= 8x+22, \\ -x &= 4, \\ x &= -4. \end{aligned}$$

Keďže pre  $x = -4$  zlomky v rovnici nie sú definované, množina všetkých jej riešení je prázdna. Správna odpoveď je A.

---

---

2. Rovnica  $3x + 4a - 7 = x + 5$  má jeden reálny koreň  $x_0 = -1$  pre parameter  $a$  rovný:

A: 7,5   B: 3,5   C: 1   D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A    B   
C    D

**Riešenie.** Keďže  $x_0 = -1$  je koreňom danej rovnice, po dosadení do rovnice musí platiť

$$3 \cdot (-1) + 4a - 7 = -1 + 5.$$

Potom

$$\begin{aligned} -3 + 4a - 7 &= 4, \\ 4a - 10 &= 4, \\ 4a &= 14, \\ a &= \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5. \end{aligned}$$

Teda správna je odpoveď B.

---

---

3. Rovnica  $5x + 7 + a(3x - 11) = 2(x - a)$  má jeden reálny koreň  $x_0 = \frac{13}{3}$  pre parameter  $a$  rovný:

A: 5   B: -5   C:  $\frac{1}{5}$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A    B   
C    D

---

**Riešenie.** Dosadením koreňa  $x_0 = \frac{13}{3}$  do zadanej rovnice dostávame rovnicu, v ktorej neznámou je parameter  $a$ .

$$5 \cdot \frac{13}{3} + 7 + a \left( 3 \cdot \frac{13}{3} - 11 \right) = 2 \left( \frac{13}{3} - a \right).$$

Ekvivalnetnými úpravami tejto rovnice vypočítame hodnotu parametra  $a$ .

$$\begin{aligned} \frac{65}{3} + 7 + 2a &= \frac{26}{3} - 2a, \\ 4a &= \frac{26}{3} - \frac{65}{3} - 7, \\ 4a &= \frac{26 - 65 - 21}{3}, \\ 4a &= -\frac{60}{3}, \\ 4a &= -20, \\ a &= -5. \end{aligned}$$

Správna je odpoveď B.

---

4. Počet všetkých riešení rovnice  $3x - 5 + a(3 - x) = 2(a - x)$  pre hodnotu parametra  $a = 5$  je:

A  B   
C  D

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Po dosadení hodnoty parametra  $a = 5$  do zadanej rovnice dostávame rovnicu

$$3x - 5 + 5(3 - x) = 2(5 - x).$$

Po úpravách ľavej a pravej strany rovnice dostávame

$$\begin{aligned} 3x - 5 + 15 - 5x &= 10 - 2x, \\ -2x + 10 &= 10 - 2x. \end{aligned}$$

V poslednej rovnici sa ľavá strana rovná pravej pre ľubovoľné reálne číslo  $x$ . Znamená to, že pre  $a = 5$  má daná rovnica nekonečne veľa riešení.

Preto odpovede A, B a C nie sú správne. Správna odpoveď je D.

---

5. Výraz  $\frac{2x - 3}{5x + 4}$  má hodnotu  $-\frac{1}{2}$  pre  $x$  rovné:

A  B   
C  D

A:  $-\frac{4}{5}$  B:  $\frac{2}{3}$  C: 10 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Ak chceme zistiť, pre akú hodnotu  $x$  sa dané výrazy rovnajú, je potrebné riešiť rovnicu

$$\frac{2x - 3}{5x + 4} = -\frac{1}{2}.$$

Rovnica má zmysel pre

$$5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{4}{5}.$$

Danú rovnicu vyriešime takto:

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{5x+4} &= -\frac{1}{2}, & / \cdot 2(5x+4) \\ 2 \cdot (2x-3) &= -1 \cdot (5x+4), \\ 4x-6 &= -5x-4, \\ 9x &= 2, \\ x &= \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Výrazy v rovnici sú definované pre všetky  $x$  z množiny reálnych čísel okrem  $x = -\frac{4}{5}$ . Preto  $x = \frac{2}{9}$  je riešením danej rovnice.

Keďže

$$\begin{aligned}\frac{2}{9} &\neq -\frac{4}{5} &\Rightarrow \text{odpoveď A nie je správna,} \\ \frac{2}{9} &\neq \frac{2}{3} &\Rightarrow \text{odpoveď B nie je správna,} \\ \frac{2}{9} &\neq 10 &\Rightarrow \text{odpoveď C nie je správna,}\end{aligned}$$

dostávame, že správna odpoveď je D.

**Poznámka.** Pri riešení sme vykonali len ekvivalentné úpravy, preto skúška nie je nevyhnutnou súčasťou riešenia.

---

---

6. Sústava

$$\begin{aligned}2x + 5y &= -1 \\ x - 4y &= 6\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0; y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $2x_0 + y_0 = 4$  B:  $2x_0 + y_0 = 3$  C:  $2x_0 + y_0 = 2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Sústavu môžeme riešiť napríklad vylučovacou metódou. Najjednoduchšie je vyjadriť z druhej rovnice neznámu  $x$ :

$$x = 6 + 4y.$$

Ak týmto nahradíme  $x$  v prvej rovnici dostaneme

$$2(6 + 4y) + 5y = -1.$$

Túto rovnicu vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned}12 + 8y + 5y &= -1, \\ 13y &= -13, \\ y &= -1.\end{aligned}$$

Dosadením  $y = -1$  do vzťahu  $x = 6 + 4y$  získame hodnotu neznámej  $x$ :

$$x = 6 + 4y = 6 + 4 \cdot (-1) = 2.$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica  $[x_0; y_0] = [2; -1]$ . Potom

$$2x_0 + y_0 = 2 \cdot 2 + (-1) = 3,$$

teda správna je odpoveď B.

---

---

7. Sústava

$$\begin{aligned}13x - 11y &= -59 \\5x + 7y &= 11\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0; y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $3x_0 + 2y_0 = 0$  B:  $3x_0 + 2y_0 = -4$  C:  $3x_0 + 2y_0 = 2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Sústavu môžeme riešiť napríklad sčítacou metódou. Jednotlivé rovnice vynásobíme vhodnými číslami tak, aby sme po sčítaní rovníc získali rovnicu s jednou neznámou.

$$\begin{array}{r}13x - 11y = -59 \quad / \cdot 7 \\5x + 7y = 11 \quad / \cdot 11 \\ \hline91x - 77y = -413 \\55x + 77y = 121 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r}91x - 77y = -413 \\55x + 77y = 121\end{array}} \right\} + \\ \hline146x = -292 \quad \Rightarrow \quad x = -2.\end{array}$$

Dosadením  $x = -2$  napríklad do druhej rovnice zadanej sústavy dostaneme hodnotu neznámej  $y$

$$\begin{aligned}5 \cdot (-2) + 7y &= 11, \\7y &= 21, \\y &= 3.\end{aligned}$$

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica  $[x_0; y_0] = [-2; 3]$ , pre ktorú platí:

$$3x_0 + 2y_0 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = -6 + 6 = 0.$$

Správna odpoveď je A.

---

---

8. Určte dve čísla, ktorých súčet je 64. Tento súčet sa nezmení, ak zmenšíme jedno z nich o jeho tretinu a druhé zväčšíme o jeho pätinu. Súčin hľadaných čísel je:

A  B   
C  D

A: 768 B: 800 C: 960 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Nech  $x, y$  sú hľadané prirodzené čísla. Potom z textu príkladu je

$$\begin{aligned}x + y &= 64, \\ \left(x - \frac{x}{3}\right) + \left(y + \frac{y}{5}\right) &= 64.\end{aligned}$$

Po úprave druhej rovnice v sústave dostaneme

$$\begin{aligned}x + y &= 64, \\ \frac{2x}{3} + \frac{6y}{5} &= 64.\end{aligned}$$

Sústavu môžeme riešiť napríklad sčítacou metódou. Vytvoríme vhodné násobky rovníc tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila.

$$\begin{array}{r} x + y = 64 \quad / \cdot (-10) \\ \frac{2x}{3} + \frac{6y}{5} = 64 \quad / \cdot 15 \\ \hline -10x - 10y = -640 \\ 10x + 18y = 960 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} -10x - 10y = -640 \\ 10x + 18y = 960 \end{array}} \right\} + \\ \hline 8y = 320 \quad \Rightarrow \quad y = 40. \end{array}$$

Z rovnice  $x + y = 64$  pre neznámu  $x$  dostávame

$$\begin{aligned} x &= 64 - y, \\ x &= 64 - 40, \\ x &= 24. \end{aligned}$$

Hľadané prirodzené čísla sú 24 a 40. Ich súčin je  $24 \cdot 40 = 960$ . Správna odpoveď je C.

---

---

9. Počet reálnych riešení sústavy lineárnych rovníc

A  B   
C  D

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4, \\ -4x + 6y &= 8, \end{aligned}$$

je práve:

A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$

---

**Riešenie.** Vyjadrieme z prvej rovnice sústavy výraz

$$2x = 3y + 4$$

a dosadíme ho po vynásobení číslom  $-2$  do ľavej strany druhej rovnice:

$$-4x + 6y = -2 \cdot 2x + 6y = -2(3y + 4) + 6y = -6y - 8 + 6y = -8.$$

Porovnaním upravenej ľavej strany 2. rovnice s jej pravou stranou dostávame:

$$-8 = 8.$$

Táto rovnosť neplatí (pre žiadne  $x$  a  $y$ ), a teda sústava rovníc nemá riešenie. Správna je odpoveď A.

Odpoveď C by sme mohli zamietnuť aj bez výpočtov, pretože sústava lineárnych rovníc nikdy nemôže mať práve dve reálne riešenia.

Ak by sme v sústave zmenili len znamienko na pravej strane druhej rovnice, dostali by sme rovnosť

$$-8 = -8,$$

ktorá na rozdiel od nami uvažovaného prípadu platí vždy, t. j. aj pre ľubovoľné hodnoty  $x$  a  $y$ . V tom prípade by sústava rovníc mala nekonečne veľa riešení, spojených vzťahom

$$2x = 3y + 4.$$

## 3.2 Úlohy

---

1. Sústava

$$\begin{aligned}2x - 3y &= -10 \\ -3x + 2y &= 5\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $x_0 + y_0 = 3$  B:  $x_0 + y_0 = 4$  C:  $x_0 + y_0 = 5$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

2. Sústava

$$\begin{aligned}x + 5y &= 6 \\ -5x - 10y &= -15\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $2x_0 - y_0 = 0$  B:  $2x_0 - y_0 = 1$  C:  $2x_0 - y_0 = 2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

3. Sústava

$$\begin{aligned}3x + y &= 3 \\ x + 2y &= 1\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2}$  B:  $x_0 \cdot y_0 = 1$  C:  $x_0 \cdot y_0 = 2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

4. Sústava

$$\begin{aligned}7x - 5y &= -3 \\ 5x - y &= 3\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $3x_0 + 2y_0 = 6$  B:  $3x_0 + 2y_0 = 7$  C:  $3x_0 + 2y_0 = 8$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

5. Sústava

$$\begin{aligned}11x + 5y &= 1 \\ -4x - y &= -2\end{aligned}$$

A  B   
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

A:  $2x_0 - 3y_0 = -7$  B:  $2x_0 - 3y_0 = 4$  C:  $2x_0 - 3y_0 = 8$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

6. Počet koreňov rovnice  $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 0$  v množine reálnych čísel je:

A  B   
C  D

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

7. Počet koreňov rovnice  $\frac{5x+4}{x+5} - 1 = \frac{-1+3x}{x+5}$  v množine reálnych čísel je:

A  B   
C  D

A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

- 
8. Počet koreňov rovnice  $\frac{-x+3}{x+2} + 4 = \frac{x+1}{x+2}$  v množine prirodzených čísel je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
9. Počet koreňov rovnice  $3(x+7) - 2(5-x) = 5(x-1) + 4(1+x)$  v množine celých čísel je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
10. Počet koreňov rovnice  $7(x+1) - 5(x-3) + 3(11+x) = 0$  v množine prirodzených čísel je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
11. Počet všetkých riešení rovnice  $7x - 11 - a(13 - 5x) = 2(x - a)$  pre hodnotu parametra  $a = -1$  je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
12. Rovnica  $a(3x-5) - (5x-3) = 3-a$  má jeden reálny koreň  $x_0 = \frac{2}{3}$  pre parameter  $a$  rovný: A  B   
C  D   
A:  $-\frac{5}{3}$  B:  $\frac{3}{5}$  C:  $\frac{5}{3}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
13. Rovnica  $7x + 13 - a(13 - 5x) = 2(x - a)$  má jeden reálny koreň  $x_0 = \frac{3}{5}$  pre parameter  $a$  rovný: A  B   
C  D   
A:  $-2$  B:  $\frac{5}{3}$  C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
14. Rovnica  $a(x+7) - 3 = -x - 4$  má jeden reálny koreň  $x_0 = -3$  pre parameter  $a$  rovný: A  B   
C  D   
A:  $-1$  B: 0,5 C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
15. Výraz  $\frac{a(x^2-4)}{a^2-(a+3)^2}$  nie je definovaný pre  $a$  rovné: A  B   
C  D   
A:  $-2; 2$  B:  $-\frac{3}{2}$  C: 0 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
16. Výraz  $\frac{x-7}{x-4} + \frac{2}{8-2x}$  má hodnotu 5 pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A:  $-3$  B: 1 C: 3 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
17. Výraz  $\frac{x-7}{x+4}$  sa rovná výrazu  $\frac{2x-3}{x+4}$  pre  $x$  rovné: A  B   
C  D   
A:  $-4$  B:  $-2$  C:  $\frac{3}{7}$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
18. Súčet dvoch reálnych čísel je  $\frac{26}{5}$  a ich rozdiel je  $\frac{24}{5}$ . Súčin týchto čísel je: A  B   
C  D   
A:  $\frac{1}{5}$  B: 1 C: 5 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

- 
19. V triede je 28 žiakov. Ak by chlapcov bolo o 6 menej, bolo by ich tolko, koľko je dievčat. Počet dievčat v triede je: A  B   
C  D
- A: 8 B: 11 C: 17 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

20. Dekan fakulty rozdelil mimoriadne prospechové štipendium v celkovej sume 1 000 eur trom študentom. Prvý študent dostal dvakrát viac, ako tretí. Tretí dostal o 40 eur menej ako druhý. Tretí študent dostal mimoriadne prospechové štipendium vo výške: A  B   
C  D
- A: 280 € B: 240 € C: 480 € D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

## 4 Riešenie lineárnych nerovnic a nerovnic v súčinovom a podielovom tvare

### 4.1 Riešené príklady

- 
- 
1. Riešením nerovnice  $\frac{7x-1}{2} - \frac{5-x}{4} < 3x - \frac{x+2}{3}$  na množine reálnych čísel je interval: A  B   
C  D   
A:  $(-\infty; -1)$  B:  $(-\infty; 1)$  C:  $(1; \infty)$  D:  $\langle 1; \infty$
- 

**Riešenie.** Najprv „odstránime zlomky“: vynásobíme obe strany nerovnice najmenším spoločným násobkom menovateľov, t. j. číslom 12 – nerovnosť sa pritom zachová. Dostaneme nerovnicu

$$6(7x-1) - 3(5-x) < 36x - 4(x+2),$$

ktorá po roznásobení má tvar

$$42x - 6 - 15 + 3x < 36x - 4x - 8.$$

Po jednoduchých úpravách (členy, ktoré obsahujú  $x$  dáme na jednu stranu nerovnice a čísla na druhú stranu) vznikne nerovnica

$$13x < 13 \quad /: 13$$

a teda  $x < 1$ , t. j.  $x \in (-\infty; 1)$ . Správna je odpoveď B.

- 
- 
2. Riešením nerovnice  $4x - 4x^2 - 1 \geq 0$  v množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A:  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$  B:  $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$  C:  $\langle 0; \infty$  D:  $\langle 1; \infty$
- 

**Riešenie.** Uvedieme jeden z možných postupov vyriešenia tejto úlohy. Doplníme kvadratický trojčlen  $4x - 4x^2 - 1$  na úplný štvorec s využitím vzorca

$$x^2 - px = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Najprv vyberieme pred zátvorku koeficient  $-4$  pri kvadratickom člene:

$$4x - 4x^2 - 1 = -4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Takto môžeme danú nerovnicu zapísať v ekvivalentnom tvare

$$-4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Výraz na ľavej strane tejto nerovnice nemôže nadobúdať kladné hodnoty (lebo druhá mocnina dáva len nezáporné hodnoty), a preto je táto nerovnica splnená len v tých bodoch, v ktorých je  $x - \frac{1}{2} = 0$ . Teda  $x = \frac{1}{2}$  je jediné riešenie danej nerovnice. Správna odpoveď je A.

Keby sme túto nerovnicu riešili intervalovou metódou, tak na číselnej osi by sme plným krúžkom vyznačili len jeden nulový bod výrazu  $V(x) = 4x - 4x^2 - 1$ , a to bod  $\frac{1}{2}$ . Ďalej by

sme zistili, že naľavo a aj napravo od bodu  $\frac{1}{2}$  je výraz  $V(x)$  záporný. V samotnom bode  $\frac{1}{2}$  je však jeho hodnota rovná nule. Vzhľadom na riešenie nerovnicu by sme dostali rovnaký záver ako v predchádzajúcom postupe.

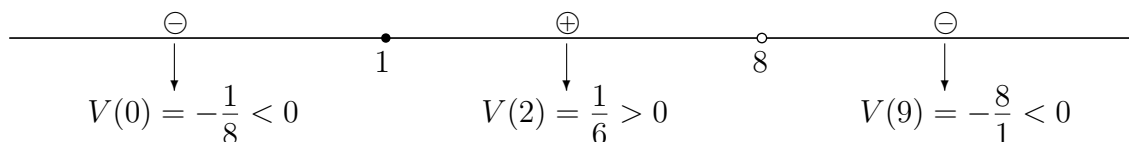
3. Počet prirodzených čísel, ktoré vyhovujú nerovnici  $\frac{x-1}{8-x} \geq 0$  je:

A  B   
C  D

A: 1 B: 8 C: 6 D: 7

**Riešenie.** Najprv vyriešime nerovnicu v množine reálnych čísel. Použijeme napríklad intervalovú metódu. Pomocou nej zistíme, na akej množine je výraz  $V(x) = \frac{x-1}{8-x}$  nezáporný. Tento výraz môže „meniť znamienko“ len v bode  $x = 8$  (čo je nulový bod jeho menovateľa, v ktorom daný výraz nie je definovaný) alebo v bode  $x = 1$  (čo je nulový bod jeho čitateľa, pretože  $V(1) = 0$ ). Číslo 1 je z oboru pravdivosti danej nerovnice (neostrá nerovnica). Preto na číselnej osi znázorníme bod 1 plným krúžkom a bod 8 prázdny krúžkom (pozri obrázok).

$$\text{riešená nerovnica: } V(x) = \frac{x-1}{8-x} \geq 0$$



Dostali sme tri intervaly:  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; 8)$  a  $\langle 8; \infty$ . Z vnútra každého z nich zvolíme ľubovoľný bod a vyčíslíme v ňom hodnotu výrazu  $V(x) = \frac{x-1}{8-x}$ . Na obrázku sme postupne znázornili vyčíslené hodnoty  $V(0)$ ,  $V(2)$  a  $V(9)$ , pričom nad zodpovedajúcim intervalom sme zapísali v krúžku znamienko plus, ak nám vyšla kladná hodnota a znamienko mínus v prípade zápornej hodnoty. Zistili sme, že výraz  $V(x)$  je nezáporný na intervale  $\langle 1; 8$ . Tento interval je riešením danej nerovnice na množine reálnych čísel. Ľahko overíme, že do tohto intervalu patrí práve sedem prirodzených čísel. Správna odpoveď je D.

4. Rozhodnite, ktorý interval obsahuje aspoň jedno riešenie nerovnice

A  B   
C  D

$$(x+2)(x+5) < (6-x)(x+5):$$

A:  $(-\infty; -7)$  B:  $(-7; -3)$  C:  $(3; 7)$  D:  $(7; \infty)$

**Riešenie.** Po prenesení všetkých výrazov na ľavú stranu

$$(x+2)(x+5) < (6-x)(x+5) \Leftrightarrow (x+2)(x+5) - (6-x)(x+5) < 0$$

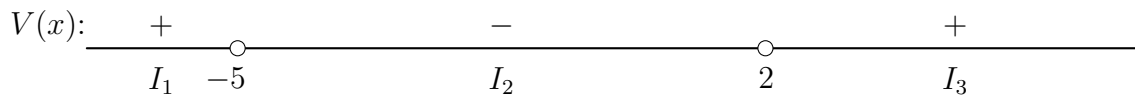
a po úprave dostávame nerovnicu

$$2(x-2)(x+5) < 0.$$

Nulové body výrazu  $V(x) = 2(x-2)(x+5)$  sú  $x_1 = -5$  a  $x_2 = 2$ . Na číselnej osi ich vyznačíme prázdny krúžkom, pretože nevyhovujú ostrej nerovnosti. Určíme znamienka výrazu  $V(x)$  vo vhodne vybraných vnútorných bodoch intervalov

$$I_1 = (-\infty; -5), \quad I_2 = (-5; 2) \quad \text{a} \quad I_3 = (2; \infty),$$

ktoré vznikli rozdelením číselnej osi nulovými bodmi. V každom intervale stačí použiť jeden bod (napríklad môžeme použiť body  $-6$ ,  $0$  a  $3$ ).



Len na intervale  $I_2$  sú hodnoty výrazu  $V(x)$  menšie ako 0, preto obor pravdivosti nerovnice je otvorený interval  $(-5; 2)$ .

Keďže  $(-\infty; -7) \cap (-5; 2) = \emptyset$ ,  $(3; 7) \cap (-5; 2) = \emptyset$  a  $(7; \infty) \cap (-5; 2) = \emptyset$ , odpovede A, C a D sú nesprávne. Pretože  $(-7; -3) \cap (-5; 2) = (-5; -3)$ , tak interval  $(-7; -3)$  obsahuje aspoň jedno riešenie nerovnice, napríklad bod  $-4$ . Správna je odpoveď B.

5. Rozhodnite, ktorý interval neobsahuje žiadne riešenie nerovnice  $\frac{1}{x+2} \geq \frac{2}{1-x}$  :

- A  B   
C  D

A:  $(-5; -3)$  B:  $(-2; 0)$  C:  $(0; 2)$  D:  $(3; 5)$

**Riešenie.** Zlomok z pravej strany nerovnice preniesieme na ľavú stranu nerovnice

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} \geq 0$$

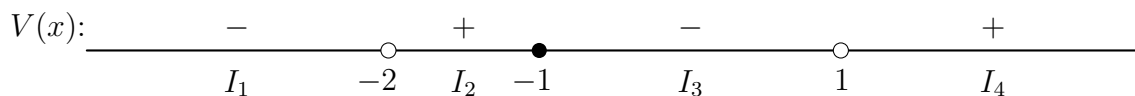
a upravíme ju na spoločného menovateľa

$$\frac{x-1+2(x+2)}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq 0.$$

Nulové body čitateľa ( $-1$ ) a menovateľa ( $-2$  a  $1$ ) výrazu  $V(x)$  delia číselnú os na 4 intervaly (nulový bod  $x = -1$  môžeme priradiť aj intervalu  $I_2$  namiesto  $I_3$ , prípadne aj obidvom):

$$I_1 = (-\infty; -2), \quad I_2 = (-2; -1), \quad I_3 = \langle -1; 1) \quad \text{a} \quad I_4 = (1; \infty).$$

Na obrázku, vzhľadom na neostrú nerovnosť, bod  $x = -1$  vyznačíme ako riešenie plným krúžkom, nulové body menovateľa nepatria do definičného oboru nerovnice a označíme ich prázdny krúžkom. Na každom intervale stačí overiť platnosť nerovnosti určením znamienka výrazu  $V(x)$  na ľavej strane v jednom vnútornom bode.



Ľahko sa presvedčíme, že požadovaná nerovnosť platí na intervaloch  $I_2, I_4$  a v bode  $x = -1$ , a teda

$$P = (-2; -1) \cup \{-1\} \cup (1; \infty) = (-2; -1) \cup (1; \infty).$$

Na záver ešte skonštatujeme, že prieniky intervalov v odpovediach B, C a D s oborom pravdivosti sú neprázdné množiny a  $(-5; -3) \cap P = \emptyset$ . Preto je správna odpoveď A.

6. Nech  $a$  je vhodné reálne číslo. Potom oborom pravdivosti nerovnice

- A  B   
C  D

$$3(x+2)(2x-1) \geq 2(x-2)(3x+1)$$

na množine reálnych čísel je interval v tvare:

A:  $(-\infty; a)$  B:  $(-\infty; a)$  C:  $\langle a; \infty)$  D:  $(a; \infty)$

---

**Riešenie.** Výrazy na obidvoch stranách roznásobíme a nerovnicu zjednodušíme:

$$6x^2 + 9x - 6 \geq 6x^2 - 10x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 19x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{19}.$$

Teda obor pravdivosti je interval  $\left\langle \frac{2}{19}; \infty \right\rangle$ . Ak zvolíme  $a = \frac{2}{19}$ , presvedčíme sa, že správna odpoveď je C.

---

---

7. Množina riešení nerovnice  $(2x + 5)^2(x - 4) \geq 0$  na množine reálnych čísel obsahuje:

A  B

C  D

A: celé záporné číslo B: záporné racionálne nie celé číslo C: záporné iracionálne číslo  
D: číslo 0

---

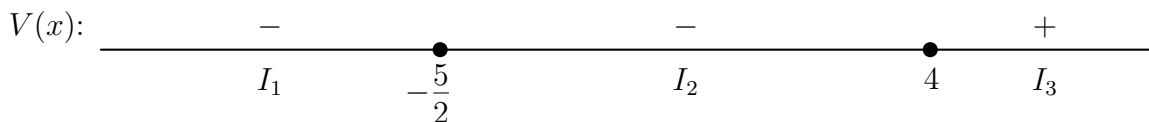
**Riešenie.** Nerovnicu upravíme na tvar so súčinom koreňových činiteľov:

$$(2x + 5)^2(x - 4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = 4 \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 (x - 4) \geq 0.$$

Nulové body výrazu  $V(x)$  sú  $x_1 = -\frac{5}{2}$  a  $x_2 = 4$ . Na číselnej osi ich vyznačíme plným krúžkom, keďže vyhovujú požadovanej nerovnosti a sú riešeniami nerovnice. Overíme znamienka výrazu  $V(x)$  vo vhodných vnútorných bodoch intervalov

$$I_1 = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right), \quad I_2 = \left(-\frac{5}{2}; 4\right) \quad \text{a} \quad I_3 = (4; \infty),$$

ktoré vznikli rozdelením číselnej osi nulovými bodmi. V každom intervale stačí použiť jeden bod, napríklad je možné zvoliť body  $-3$ ,  $0$  a  $5$ .



Keďže len na intervale  $I_3$  sú hodnoty väčšie ako  $0$ , obor pravdivosti nerovnice je zjednotenie

$$\left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup (4; \infty).$$

Môžeme konštatovať, že  $0$  nie je riešením, a teda odpoveď D je nesprávna. Jediným záporným riešením je zlomok  $x = -\frac{5}{2}$ . Keďže číslo  $-\frac{5}{2}$  nie je ani celé ani iracionálne, odpovede A a C sú nesprávne. Číslo  $-\frac{5}{2}$  je záporné racionálne nie celé číslo. Správna je odpoveď B.

---

---

8. Riešením nerovnice  $4x^3 + 3x^4 \leq x^5$  na množine reálnych čísel je množina:

A  B

C  D

A:  $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$  B:  $(-1; 0) \cup (4; \infty)$  C:  $\langle 4; \infty \rangle$  D:  $\langle -1; 0 \rangle$

---

**Riešenie.** Danú nerovnicu vyriešime intervalovou metódou. Preto na jednej jej strane „vyrobíme nulu“, napríklad prenesením výrazu  $x^5$  na ľavú stranu. Dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$4x^3 + 3x^4 - x^5 \leq 0.$$

Najprv vyriešime zodpovedajúcu rovnicu  $4x^3 + 3x^4 - x^5 = 0$ . K tomu je vhodné zapísať polynóm  $P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5$  v tvare súčinu koreňových činiteľov. Tu nám pomôže „vytknutie výrazu  $x^3$  pred zátvorku“:

$$4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(4 + 3x - x^2).$$

Získaný činiteľ  $4 + 3x - x^2$  je rovný nule práve v koreňoch kvadratickej rovnice

$$4 + 3x - x^2 = 0$$

s diskriminantom rovným 25. Lahko sa presvedčíme, že jej korene sú 4 a  $-1$ . Potom zo známeho rozkladu kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov dostaneme

$$4 + 3x - x^2 = (-1)(x - 4)(x + 1) = (x + 1)(4 - x).$$

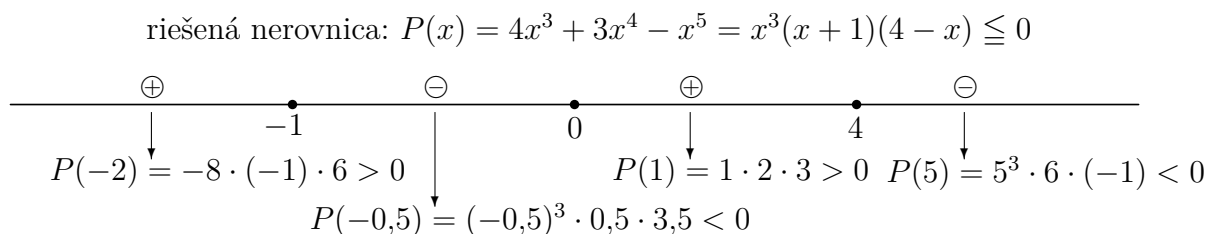
Takto dostaneme požadovaný rozklad polynómu  $P$  na súčin koreňových činiteľov:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x + 1)(4 - x).$$

Odtiaľ ľahko získame nulové body (korene) tohto polynómu:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x + 1)(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \vee x = -1 \vee x = 4).$$

Tieto korene zakreslíme na číselnej osi plnými krúžkami, lebo riešime „neostrú nerovnicu“ (pozri obrázok). Kvôli lepšiemu prehľadu sme nad číselnou osou zapísali aj riešenú nerovnicu:



Body  $-1$ ,  $0$  a  $4$  rozdelili číselnú os na štyri intervaly (všimnite si, že sme na číselnej osi nezachovali mierku – tá tu nie je podstatná). Z vnútra každého intervalu zvolíme ľubovoľný bod a určíme v ňom znamienko hodnoty polynómu (pre nás je dôležité to, či táto hodnota je kladná alebo záporná) s využitím rozkladu polynómu na súčin koreňových činiteľov:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5 = x^3(x + 1)(4 - x).$$

Z intervalu  $(-\infty; -1)$  sme zvolili bod  $-2$  a zistili sme znamienko hodnoty  $P(-2)$ . Všimli sme si len znamienka hodnôt jednotlivých činiteľov v bode  $-2$ . Prvý činiteľ  $x^3$  nadobúda v bode  $-2$  zápornú hodnotu (konkrétne  $-8$ ), druhý činiteľ  $(x + 1)$  tiež zápornú ( $-1$ ) a tretí činiteľ  $(4 - x)$  kladnú hodnotu ( $6$ ). Tieto informácie sme na obrázku zapísali pod skúmaným intervalom  $(-\infty; -1)$  v tvare  $P(-2) = -8 \cdot (-1) \cdot 6 > 0$ . Teda polynóm  $P$  nadobúda na tomto intervale len kladné hodnoty. Podobným spôsobom sme sa vysporiadali aj so zvyšnými intervalmi.

Na obrázku vidno, že polynóm  $P(x) = 4x^3 + 3x^4 - x^5$  je menší alebo rovný ako nula na množine  $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$ , a preto správna odpoveď je A.

## 4.2 Úlohy

- 
1. Počet riešení nerovnice  $\frac{2x}{2x+11} \geq \frac{3x-1}{3x-11}$  na množine prirodzených čísel je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3
- 
2. Počet riešení nerovnice  $\frac{x}{x-3} \geq \frac{x+2}{x-7}$  na množine celých kladných čísel je: A  B   
C  D   
A: 1 B: 3 C: 4 D: 6
- 
3. Počet nezáporných celočíselných riešení nerovnice  $\frac{x+1}{x+5} \geq \frac{x-1}{x-5}$  je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 3 D: 5
- 
4. Súčet záporných celočíselných riešení nerovnice  $\frac{x+1}{x+5} > \frac{x-1}{x+5}$  je: A  B   
C  D   
A: -15 B: -10 C: -5 D: -3
- 
5. Súčet všetkých riešení nerovnice  $\frac{x-1}{x-2} > \frac{x+1}{x-4}$  na množine kladných celých čísel je: A  B   
C  D   
A: 3 B: 4 C: 5 D: 6
- 
6. Súčet všetkých celočíselných riešení nerovnice  $(x-1)(x-5) \geq (3x-7)(x-5)$  nie je deliteľný číslom: A  B   
C  D   
A: 2 B: 4 C: 6 D: 8
- 
7. Počet riešení nerovnice  $(x+5)(8x-3) \leq (2x-1)(4x+7)$  na množine celých kladných čísel je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3
- 
8. Počet záporných celočíselných riešení nerovnice  $(x+3)(x-3)(3x+1) \geq (x+3)(x-3)(2x-2)$  je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3
- 
9. Súčet všetkých celočíselných riešení nerovnice  $(x+2)(x+8) \geq (4x-25)(x+8)$  je deliteľný číslom: A  B   
C  D   
A: 2 B: 3 C: 4 D: 5
- 
10. Počet celých kladných riešení nerovnice  $(x-4)(6x+5) > (3x+3)(2x+7)$  je: A  B   
C  D   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3
- 
11. Riešením nerovnice  $\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} \leq \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2}$  na množine reálnych čísel je interval: A  B   
C  D   
A:  $(2; \infty)$  B:  $(0; 2)$  C:  $(0; 2)$  D:  $\langle 2; \infty$
-

12. Riešením nerovnice  $3(x^2 - 4x + 5) > (1 + 3x)(x - 2)$  na množine reálnych čísel je interval: A  B   
C  D   
A:  $(\frac{17}{7}; \infty)$  B:  $(-\infty; \frac{17}{7})$  C:  $(-\infty; \frac{7}{17})$  D:  $(-\frac{7}{17}; \infty)$

---

13. Riešením nerovnice  $x^2 + 4x < 8x - 15$  na množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A: (0; 4) B: (8; 15) C: prázdna množina D: množina reálnych čísel

---

14. Riešením nerovnice  $x^2 < 2x$  na množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A:  $(-\infty; 2)$  B:  $(2; \infty)$  C: prázdna množina D: (0; 2)

---

15. Riešením nerovnice  $6 - 3x^2 - 7x \geq 0$  na množine reálnych čísel je interval: A  B   
C  D   
A:  $(-\infty; -3)$  B:  $\langle -\frac{2}{3}; 3 \rangle$  C:  $\langle -3; \frac{2}{3} \rangle$  D:  $\langle -3; 3 \rangle$

---

16. Riešením nerovnice  $6 + 3x^2 - 7x \geq 0$  na množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A: množina reálnych čísel B:  $\langle \frac{2}{3}; 3 \rangle$  C:  $\langle -3; -\frac{2}{3} \rangle$  D:  $\langle 0; 3 \rangle$

---

17. Riešením nerovnice  $9x^2 + 4 \leq 12x$  na množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A: prázdna množina B:  $\{\frac{2}{3}\}$  C:  $\langle 0; \frac{2}{3} \rangle$  D:  $\langle 0; \frac{3}{2} \rangle$

---

18. Počet celých čísel, ktoré vyhovujú nerovnici  $3x^2 \leq 2x + 5$ , je: A  B   
C  D   
A: 3 B: 4 C: 2 D: 1

---

19. Počet párnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici  $\frac{8-x}{x+4} > 0$ , je: A  B   
C  D   
A: 2 B: 3 C: 4 D: 5

---

20. Riešením nerovnice  $\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{x-1}$  na množine reálnych čísel je: A  B   
C  D   
A: prázdna množina B: (-2; 1) C:  $\langle -2; 1 \rangle$  D: (0;  $\infty$ )



Absolútnu hodnotu v nerovnici „odstránime“, ak nahradíme

$$|V(x)| = \begin{cases} -V(x) & \text{pre } V(x) \leq 0, \\ V(x) & \text{pre } V(x) \geq 0. \end{cases}$$

Na  $I_1$  je  $3x + 7 \leq 0$ , preto riešime rovnicu

$$\begin{aligned} -(3x + 7) + 3x + 5 &= 0, \\ -2 &= 0, \\ P_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Na  $I_2$  je  $3x + 7 \geq 0$ , preto riešime rovnicu

$$\begin{aligned} (3x + 7) + 3x + 5 &= 0, \\ 6x + 12 &= 0, \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Kedže  $-2 \in I_2$ , dostávame

$$P_2 = \{-2\}.$$

Obor pravdivosti rovnice je

$$P = P_1 \cup P_2 = \emptyset \cup \{-2\} = \{-2\}.$$

Rovnica má jedno reálne riešenie, a preto je správna odpoveď B.

3. Nech  $a$  je vhodné reálne číslo. Potom obor pravdivosti nerovnice  $|2x + 1| \geq 2|x| + 1$  na množine reálnych čísel je interval v tvare:

A:  $(-\infty, a)$    B:  $(-\infty, a]$    C:  $\langle a, \infty)$    D:  $\langle a, \infty]$

A    B   
C    D

**Riešenie.** Kedže pre všetky reálne čísla  $a$  a  $b$  platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

t. j. absolútna hodnota súčtu nepresahuje súčet absolútnych hodnôt, pre všetky reálne čísla  $x$  platí nerovnosť

$$|2x + 1| \leq 2|x| + 1.$$

Obor pravdivosti nerovnice teda získame, ak vyriešime rovnicu

$$|2x + 1| = 2|x| + 1.$$

Výrazy v absolútnych hodnotách ( $V_1(x) = 2x + 1$  a  $V_2(x) = x$ ) sú rovné nule pre

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{a} \quad x = 0.$$

Tieto body rozdeľujú číselnú os na tri intervaly, na ktorých postupne riešime úlohu:

$$I_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \quad I_2 = \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad \text{a} \quad I_3 = (0; \infty).$$

Uzavretie intervalov v krajných bodoch sme mohli zvoliť aj inak, napríklad  $I_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ ,  $I_2 = \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$  a  $I_3 = \langle 0; \infty)$ . Nad intervalmi sú na obrázku znázornené znamienka výrazov  $V_1(x)$  a  $V_2(x)$  v ich vnútorných bodoch.

|            |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|
| $V_1(x)$ : | -     | +     | +     |
| $V_2(x)$ : | -     | -     | +     |
|            | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov  $V_1(x)$  a  $V_2(x)$ :

$$\begin{aligned} x \in I_1: & \quad -(2x + 1) = -2x + 1 & \Leftrightarrow & \quad -1 = 1 & \Rightarrow & \quad P_1 = \emptyset, \\ x \in I_2: & \quad 2x + 1 = -2x + 1 & \Leftrightarrow & \quad x = 0 \in I_2 & \Rightarrow & \quad P_2 = \{0\}, \\ x \in I_3: & \quad 2x + 1 = 2x + 1 & \Leftrightarrow & \quad 0 = 0 & \Rightarrow & \quad P_3 = \mathbb{R} \cap I_3 = I_3, \end{aligned}$$

a teda obor pravdivosti nerovnice je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \{0\} \cup I_3 = \langle 0, \infty \rangle.$$

Správna odpoveď je C.

4. Obor pravdivosti rovnice  $|x + 1| + |x - 1| = 2|x|$  v obore reálnych čísel je:

A  B   
C  D

A: interval B: zjednotenie dvoch intervalov C: jednoprvková množina D: dvojprvková množina

**Riešenie.** Výrazy v absolútnych hodnotách:

$$V_1(x) = x + 1, \quad V_2(x) = x - 1 \quad \text{a} \quad V_3(x) = x$$

sú nulové pre  $x = -1$ ,  $x = 1$  a  $x = 0$ . Preto budeme úlohu riešiť na štyroch intervaloch, na ktoré tieto nulové body rozdelili číselnú os:

$$I_1 = (-\infty; -1), \quad I_2 = (-1; 0), \quad I_3 = (0; 1) \quad \text{a} \quad I_4 = (1; \infty).$$

Nad intervalmi sú na obrázku znázornené znamienka výrazov  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  a  $V_3(x)$  v ich vnútorných bodoch.

|            |       |    |       |   |       |   |       |
|------------|-------|----|-------|---|-------|---|-------|
| $V_1(x)$ : | -     | +  | +     | + |       |   |       |
| $V_2(x)$ : | -     | -  | -     | + |       |   |       |
| $V_3(x)$ : | -     | -  | +     | + |       |   |       |
|            | $I_1$ | -1 | $I_2$ | 0 | $I_3$ | 1 | $I_4$ |

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  a  $V_3(x)$ :

$$\begin{aligned} x \in I_1: & \quad -(x + 1) + [-(x - 1)] = -2x & \Leftrightarrow & \quad 0 = 0 & \Rightarrow & \quad P_1 = \mathbb{R} \cap I_1 = I_1, \\ x \in I_2: & \quad (x + 1) + [-(x - 1)] = -2x & \Leftrightarrow & \quad x = -1 \notin I_2 & \Rightarrow & \quad P_2 = \emptyset, \\ x \in I_3: & \quad (x + 1) + [-(x - 1)] = 2x & \Leftrightarrow & \quad x = 1 \in I_3 & \Rightarrow & \quad P_3 = \{1\}, \\ x \in I_4: & \quad (x + 1) + (x - 1) = 2x & \Leftrightarrow & \quad 0 = 0 & \Rightarrow & \quad P_4 = \mathbb{R} \cap I_4 = I_4, \end{aligned}$$

a teda obor pravdivosti je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle,$$

čo je zjednotenie dvoch intervalov. Správna je odpoveď B.

5. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice  $|x + 1| + 2|2 - x| = 2|x + 2|$  je rovný:

A  B   
C  D

A:  $\frac{19}{3}$  B:  $\frac{20}{3}$  C:  $\frac{22}{3}$  D:  $\frac{25}{3}$

---

**Riešenie.** Výrazy

$$V_1(x) = x + 1, \quad V_2(x) = 2 - x \quad \text{a} \quad V_3(x) = x + 2$$

sú nulové pre  $x = -1$ ,  $x = 2$  a  $x = -2$ , preto budeme úlohu riešiť na štyroch intervaloch, na ktoré tieto nulové body delia číselnú os:

$$I_1 = (-\infty; -2), \quad I_2 = (-2; -1), \quad I_3 = (-1; 2) \quad \text{a} \quad I_4 = (2; \infty).$$

Nad intervalmi na obrázku sú znázornené znamienka výrazov  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  a  $V_3(x)$  v ich vnútorných bodoch.

|            |       |    |       |    |       |   |       |
|------------|-------|----|-------|----|-------|---|-------|
| $V_1(x)$ : | -     | -  | +     | +  |       |   |       |
| $V_2(x)$ : | +     | +  | +     | -  |       |   |       |
| $V_3(x)$ : | -     | +  | +     | +  |       |   |       |
|            | $I_1$ | -2 | $I_2$ | -1 | $I_3$ | 2 | $I_4$ |

Na každom intervale „odstránime“ všetky absolútne hodnoty na základe znamienok výrazov  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  a  $V_3(x)$ :

$$\begin{aligned} x \in I_1: \quad & -(x+1) + 2(2-x) = -2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 7 \notin I_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \emptyset, \\ x \in I_2: \quad & -(x+1) + 2(2-x) = 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{5} \notin I_2 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \emptyset, \\ x \in I_3: \quad & (x+1) + 2(2-x) = 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \in I_3 \quad \Rightarrow \quad P_3 = \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \\ x \in I_4: \quad & (x+1) + (-2(2-x)) = 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 7 \in I_4 \quad \Rightarrow \quad P_4 = \{7\}, \end{aligned}$$

a teda obor pravdivosti je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \left\{ \frac{1}{3}; 7 \right\}.$$

Keďže súčet koreňov je  $\frac{1}{3} + 7 = \frac{22}{3}$ , správna odpoveď je C.

---

6. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice  $|2x - 1| = |2 - x|$  je:

A  B   
C  D

A: 1 B: 2 C: -1 D: 0

**Riešenie.** Pre rovnosť dvoch absolútnych hodnôt platí:

$$|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad (a = b \quad \vee \quad a = -b)$$

Na základe toho dostávame dve možnosti (stačí položiť  $a = 2x - 1$  a  $b = 2 - x$ ):

1.  $2x - 1 = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1;$

2.  $2x - 1 = -(2 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$

Dostali sme dva korene, ktorých súčet je 0, a preto je správna odpoveď D.

---

7. Súčet všetkých reálnych koreňov rovnice  $x^2 - 2x = |x + 4|$  je:

A  B   
C  D

A: 1 B: 3 C: -1 D: 2

**Riešenie.** Absolútna hodnota  $|x+4|$  má nulový bod  $x = -4$ , ktorý rozdeľuje množinu reálnych čísel na zjednotenie dvoch intervalov:

$$\mathbb{R} = (-\infty; -4) \cup \langle -4; \infty \rangle.$$

1. Pre  $x \in (-\infty; -4)$  je výraz  $x + 4$  záporný, a preto

$$|x + 4| = -x - 4.$$

Potom daná rovnica má tvar

$$x^2 - 2x = -x - 4,$$

čo je kvadratická rovnica

$$x^2 - x + 4 = 0.$$

Jej diskriminant je  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15$ . Je záporný, a preto rovnica nemá na intervale  $(-\infty; -4)$  riešenie.

2. Pre  $x \in \langle -4; \infty)$  je výraz  $x + 4$  nezáporný, a preto

$$|x + 4| = x + 4.$$

Rovnica má teda tvar

$$x^2 - 2x = x + 4,$$

t. j.  $x^2 - 3x - 4 = 0$ . Lahko sa presvedčíme, že koreňmi tejto kvadratickej rovnice sú čísla  $x = 4$  a  $x = -1$ . Obe patria do intervalu  $\langle -4; \infty)$ , a tak sú koreňmi aj našej pôvodnej rovnice s absolútnou hodnotou.

Zistili sme, že daná rovnica má dva korene:  $x = 4$  a  $x = -1$ . Ich súčet je 3, a preto je správna odpoveď B.

---

---

8. Množina všetkých riešení nerovnice  $|5 - 2x| \leq 6$  je interval:

A:  $\langle -\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \rangle$    B:  $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$    C:  $\langle 0; \frac{11}{2} \rangle$    D:  $\langle -\frac{1}{2}; \frac{11}{2} \rangle$

A    B   
C    D

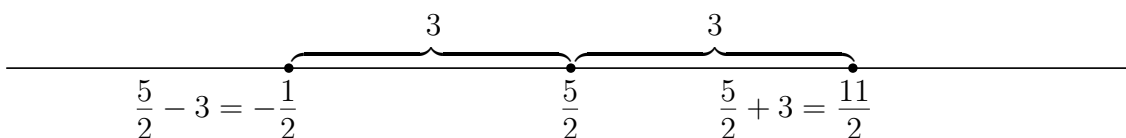
**Riešenie.** Je viac možných postupov na vyriešenie tejto nerovnice. My využijeme ten fakt, že ak je  $a$  konkrétne reálne číslo, tak  $|x - a|$  vyjadruje vzdialenosť bodu  $x$  na číselnej osi od bodu (číslo)  $a$ . Využívajúc vlastnosti absolútnej hodnoty upravíme výraz  $|5 - 2x|$  na tvar  $|x - a|$ . Keďže

$$|5 - 2x| = \left| -2 \cdot \left( x - \frac{5}{2} \right) \right| = |-2| \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right| = 2 \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right|,$$

tak danú nerovnicu môžeme zapísať v ekvivalentnom tvare

$$2 \cdot \left| x - \frac{5}{2} \right| \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \left| x - \frac{5}{2} \right| \leq 3.$$

Riešením poslednej nerovnice je množina všetkých tých bodov  $x$ , ktoré na číselnej osi majú od bodu  $\frac{5}{2}$  vzdialenosť menšiu alebo rovnú ako 3. Na nasledujúcom obrázku túto množinu lahko zistíme:



Riešením nerovnice je interval  $\langle -\frac{1}{2}; \frac{11}{2} \rangle$ . Správna odpoveď je D.

## 5.2 Úlohy

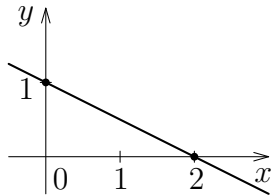
- 
1. Počet riešení rovnice  $|3x + 7| = 5x + 11$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
2. Počet riešení rovnice  $|6 - 3x| = 2x - 5$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
3. Počet riešení rovnice  $|2x + 6| + 2x + 6 = 0$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
4. Počet riešení rovnice  $|3x - 2| = 1 - 3x$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
5. Počet riešení rovnice  $|2x - 7| = x - 2$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
6. Počet riešení rovnice  $|3x + 12| = 3x + 6$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D:  $\infty$  C  D
- 
7. Rovnica  $|3 - 2x| = 2x - 3$  má: A  B   
A: aspoň jedno záporné riešenie B: aspoň jedno kladné riešenie C: práve dve riešenia C  D   
D: najviac jedno riešenie
- 
8. Rovnica  $|3x + 2| = 3x - 2$  má: A  B   
A: aspoň jedno záporné riešenie B: aspoň jedno kladné riešenie C: práve dve riešenia C  D   
D: najviac jedno riešenie
- 
9. Rovnica  $|3x + 4| = 3x + 8$  má: A  B   
A: nula riešení B: aspoň jedno záporné riešenie C: aspoň jedno kladné riešenie D: práve C  D   
dve riešenia
- 
10. Súčet koreňov rovnice  $|5x - 6| = 3x - 2$  je: A  B   
A: -3 B: 0 C: 3 D: 6 C  D
- 
11. Súčin koreňov rovnice  $|4x + 5| = 3x + 9$  je: A  B   
A: -8 B: -2 C: 0 D: 14 C  D
- 
12. Koreň rovnice  $|3x + 6| + 2x + 4 = 0$  leží v intervale: A  B   
A: (-9; -6) B: (-6; -3) C: (-3; 0) D: (0; 3) C  D

- 
13. Koreň rovnice  $|3x + 6| = 5x + 10$  je deliteľný číslom: A  B   
A: 2 B: 3 C: 5 D: 7 C  D
- 
14. Súčin všetkých reálnych koreňov rovnice  $|3x + 1| = 2|x + 1|$  je: A  B   
A: 1 B:  $-\frac{3}{5}$  C:  $\frac{2}{5}$  D: 0 C  D
- 
15. Súčet druhých mocnín všetkých reálnych koreňov rovnice  $|3x + 1| = 3|x + 1|$  je: A  B   
A: 9 B:  $\frac{1}{9}$  C:  $\frac{4}{9}$  D: 10 C  D
- 
16. Všetky reálne korene rovnice  $|1 - x| - 3 = 2x$  tvoria množinu: A  B   
A:  $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$  B:  $\left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$  C:  $\{-4\}$  D:  $\left\langle -4; -\frac{2}{3} \right\rangle$  C  D
- 
17. Všetky reálne korene rovnice  $2 - 3x = |x + 2|$  tvoria množinu: A  B   
A:  $\{0; 2\}$  B:  $\{2\}$  C:  $\langle 0; 2 \rangle$  D:  $\{0\}$  C  D
- 
18. Všetky reálne korene rovnice  $\sqrt{x^2} - 3x - 8 = 0$  tvoria množinu: A  B   
A:  $\{-4; -2\}$  B:  $\{-4; 1\}$  C:  $\{-2; 2\}$  D:  $\{-2\}$  C  D
- 
19. Súčin všetkých reálnych koreňov rovnice  $|x - 4| - x^2 = 2x - 6$  je: A  B   
A: 10 B: 2 C: -4 D: -10 C  D
- 
20. Všetky reálne korene rovnice  $|x - 5| + 7 = x^2$  sú z intervalu: A  B   
A:  $(-4; 4)$  B:  $(-3; 3)$  C:  $\langle -4; 4 \rangle$  D:  $\langle -4; 3 \rangle$  C  D
- 
21. Množina riešení nerovnice  $|3x + 2| < 4$  je interval: A  B   
A:  $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$  B:  $\langle 0; 4 \rangle$  C:  $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$  D:  $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$  C  D
- 
22. Množina riešení nerovnice  $|2 - x| \geq 7$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -5) \cup (9; \infty)$  B:  $\langle 9; \infty \rangle$  C:  $(-\infty; -5)$  D:  $(-5; 9)$  C  D

## 6 Funkcie (základné vlastnosti, graf)

### 6.1 Riešené príklady

1. Na obrázku je znázornená priamka,



A  B   
C  D

ktorá je grafom funkcie  $y = f(x)$  danej vzťahom:

A:  $y = 2 - 2x$    B:  $y = 1 - \frac{x}{2}$    C:  $y = 1 + 2x$    D:  $y = 1 - 2x$

**Riešenie.** Všetky funkcie vo výsledkoch sú lineárne, preto ich grafmi sú priamky. Stačí teda overiť, či dva body priamky znázornenej na obrázku vyhovujú odpovedajúcej rovnici. Z grafu vidno, že priamka prechádza bodmi  $[2; 0]$  a  $[0; 1]$ . Bod priamky, pre ktorý je  $x = 2$  a  $y = 0$ , nevyhovuje rovniciam A, C, D, pretože

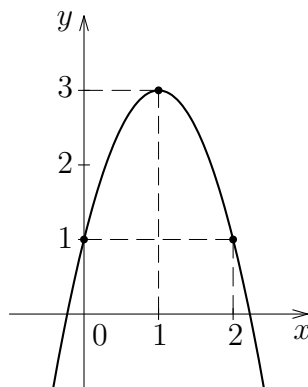
$$0 \neq 2 - 2 \cdot 2 = -2, \quad 0 \neq 1 + 2 \cdot 2 = 5, \quad 0 \neq 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

a vyhovuje rovnici B, ktorej vyhovuje aj bod  $[0; 1]$ :

$$2 = 2 - 2 \cdot 0 \quad \text{a} \quad 0 = 2 - 2 \cdot 1.$$

Preto je správna odpoveď B.

2. Rovnica paraboly znázornenej na obrázku



A  B   
C  D

je:

A:  $y = 1 + 2x$    B:  $y = -2x^2 + 4x + 1$    C:  $y = 2x^2 + 1$    D:  $y = 3 - 2(x - 1)^4$

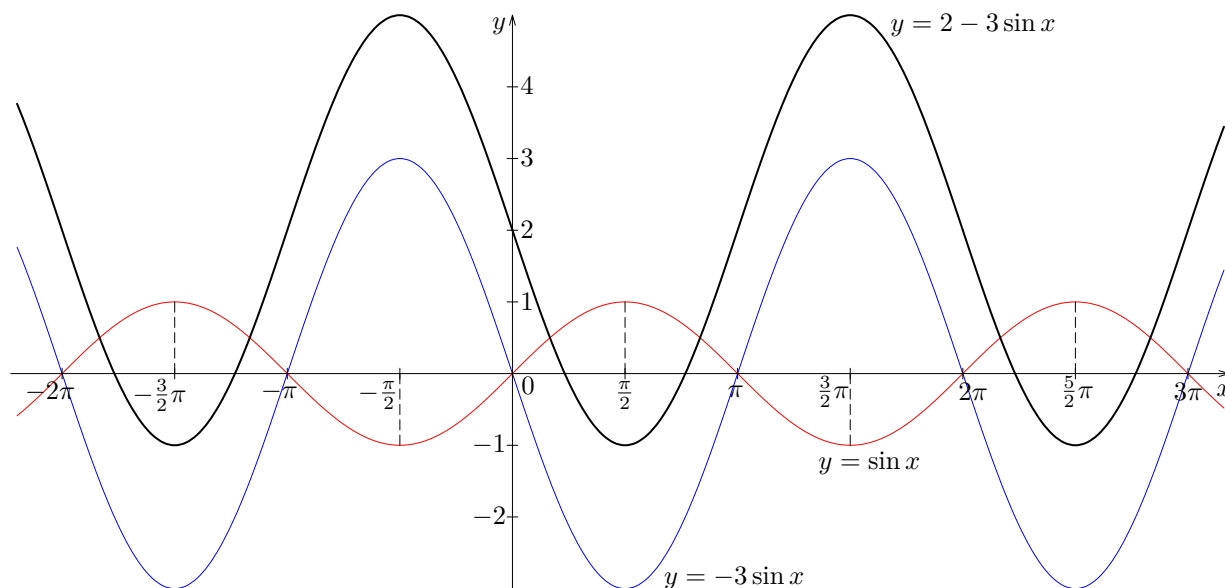
**Riešenie.** Parabola je grafom kvadratickej funkcie, preto prípady A a D sú nesprávne. Rovnica A neobsahuje kvadratický člen (je to predpis lineárnej funkcie) a rovnica D obsahuje člen  $x^4$ , a teda sa jedná o polynóm štvrtého rádu, čo nie je kvadratická funkcia. Vzhľadom na to, že vrchol paraboly je maximum, je koeficient pri  $x^2$  záporný, teda nevyhovuje odpoveď C. Lahko sa dá overiť, že tri body  $[0; 1]$ ,  $[1; 3]$  a  $[2; 1]$ , zvýraznené na grafe, vyhovujú rovnici  $y = -2x^2 + 4x + 1$ , a teda správna je odpoveď B.

3. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 2 - 3 \sin x$  je pravdivé:

A  B   
C  D

A: funkcia je zdola ohraničená B: funkcia je zhora neohraničená C: funkcia je prostá  
D: funkcia je neklesajúca

**Riešenie.** Najprv načrtne graf danej funkcie. Postupne načrtne graf funkcie  $y = \sin x$ , ďalej jeho „preklopením okolo osi  $x$ “ (t. j. použitím osovej súmernosti podľa osi  $x$ ) získame graf funkcie  $y = -\sin x$  a jeho trojnásobným zväčšením v smere osi  $y$ , odpovedajúcim koeficientu 3, dostaneme graf funkcie  $y = -3 \sin x$ . Nakoniec posunutím nahor o 2 jednotky získame graf funkcie  $y = 2 - 3 \sin x$ . Z náčrtu jednoducho určíme požadované vlastnosti.



Funkcia  $y = \sin x$  je periodická a ohraničená (čo si môžeme všimnúť aj na grafe), a preto je periodická a ohraničená aj funkcia  $y = 2 - 3 \sin x$ . Keďže funkcia je zdola ohraničená (pretože je ohraničená), správna odpoveď je A.

Z vyššie uvedeného tiež vyplýva, že odpoveď B nie je správna. Funkcia nie je prostá ani neklesajúca (lebo je periodická a spojitá), preto odpovede C a D sú nesprávne.

4. Funkcia  $f: y = 6 - x - x^2$  nadobúda kladné hodnoty na množine:

A  B   
C  D

A:  $(-3; -2)$  B:  $(2; 3)$  C:  $(-3; 2)$  D:  $(-2; 3)$

**Riešenie.** Daná funkcia nadobúda kladné hodnoty práve vtedy, keď

$$6 - x - x^2 > 0.$$

Túto nerovnicu môžeme vyriešiť napríklad intervalovou metódou, ktorú nazývame aj metódou nulových bodov. Koreňmi zodpovedajúcej rovnice

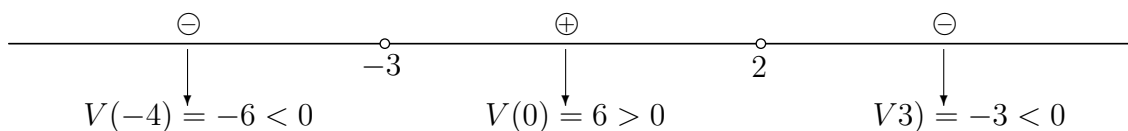
$$6 - x - x^2 = 0$$

sú čísla 2 a  $-3$ , ktoré rozdeľujú číselnú os na tri intervaly (pozri obrázok):

$$I_1 = (-\infty; -3), \quad I_2 = (-3; 2) \quad \text{a} \quad I_3 = (2; \infty).$$

Čísla 2 a  $-3$  vyznačíme na obrázku prázdny krúžkom, pretože nie sú riešeniami danej nerovnice s ostrou nerovnosťou.

riešená nerovnica  $V(x) = 6 - x - x^2 = -(x - 2)(x + 3) > 0$



Na ľubovoľnom z týchto intervalov je výraz  $V(x)$  buď kladný alebo záporný. O tom, ktorá situácia nastáva, rozhodneme vyčíslením jeho hodnoty vo vhodne zvolených bodoch jednotlivých intervalov. Pre interval  $I_1 = (-\infty; -3)$  zvolíme napríklad číslo  $-4$ : potom

$$V(-4) = 6 + 4 - (-4)^2 = -6.$$

Číslo  $-6$  je záporné, a preto označíme interval  $I_1$  znakom  $\ominus$ , t. j. výraz  $V(x)$  je na ňom len záporný. Podobným spôsobom určíme znamienko výrazu  $V(x)$  na intervaloch  $I_2$  a  $I_3$ . Výsledky sú znázornené na obrázku.

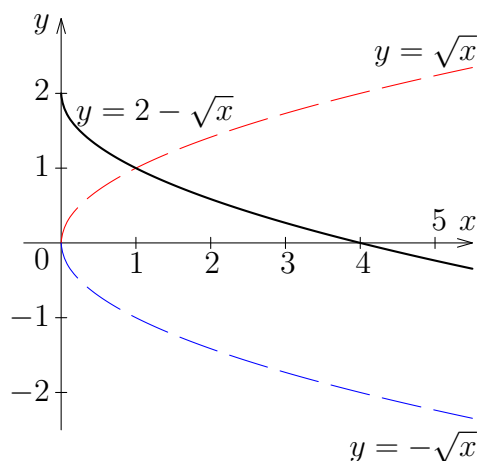
Riešením danej nerovnice je množina všetkých  $x \in \mathbb{R}$ , v ktorých výraz  $V(x)$  nadobúda kladné hodnoty. Táto množina je určená zjednotením všetkých intervalov, ktoré sme na obrázku označili znakom  $\oplus$ . To znamená, že funkcia nadobúda kladné hodnoty práve na intervale  $I_2 = (-3; 2)$ . Správna odpoveď je C.

5. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 2 - \sqrt{x}$  je pravdivé:

A  B   
C  D

A: funkcia je ohraničená B: funkcia je periodická C: funkcia je prostá D: funkcia je rastúca

**Riešenie.** Na určenie správnej odpovede využijeme graf funkcie. Najprv načrtne graf funkcie  $y = \sqrt{x}$ , ďalej s využitím osovej súmernosti podľa osi  $x$  získame graf funkcie  $y = -\sqrt{x}$  a nakoniec jeho posunutím o dve jednotky nahor získame graf funkcie  $y = 2 - \sqrt{x}$  (viď obrázok). Z náčrtu jednoducho určíme požadované vlastnosti.



Funkcia  $y = \sqrt{x}$  je zhora neohraničená, a preto je funkcia  $y = 2 - \sqrt{x}$  neohraničená zdola, a teda neohraničená. Funkcia teda nevyhovuje tvrdeniu A.

Z grafu vidíme, že funkcia je klesajúca, a teda nie je ani periodická (vlastnosť B) ani rastúca (vlastnosť D), ale je prostá. Správna odpoveď je C.

---

---

6. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 3^{-x} - 4$  je nepravdivé:

A  B   
C  D

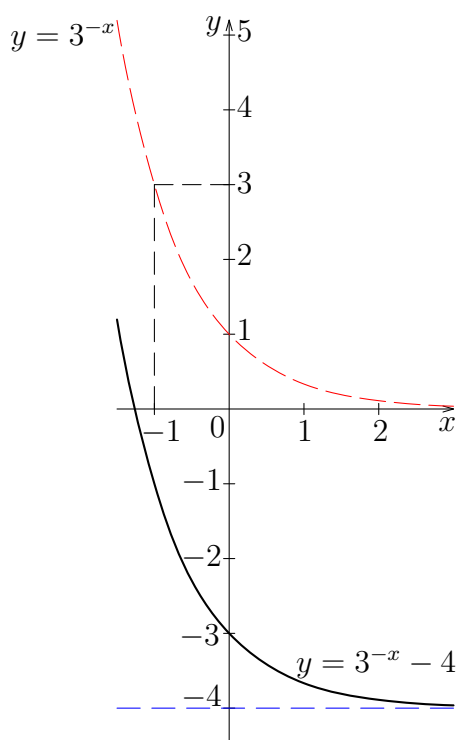
A: funkcia je zdola ohraničená B: funkcia je zhora neohraničená C: funkcia je prostá  
D: funkcia je periodická

---

**Riešenie.** Aj v tomto prípade načrtneme graf funkcie (najprv načrtneme graf funkcie  $y = 3^{-x}$  a potom ho posunieme v smere osi  $y$  o 4 jednotky nadol) a z náčrtu jednoducho rozhodneme, ktoré vlastnosti platia a ktoré nie. Platí:

$$3^{-x} = (3^{-1})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Funkcia  $y = 3^{-x}$  je teda exponenciálna funkcia so základom  $\frac{1}{3}$ , ktorý je z intervalu  $(0; 1)$ . Jedná sa teda o klesajúcu funkciu.



Môžeme konštatovať, že funkcia je zdola ohraničená, napríklad hodnotou  $-4$ , nie je zhora ohraničená a ako klesajúca nemôže byť periodická, ale musí byť prostá. Teda nepravdivé je tvrdenie D.

---

---

7. Oborom hodnôt funkcie danej predpisom  $f: y = x^2 + 4x + 7, x \in (-\infty; \infty)$  je množina:

A  B   
C  D

A:  $\langle 7; \infty$ ) B:  $\langle 3; \infty$ ) C:  $\langle 4; \infty$ ) D:  $\langle 0; \infty$ )

---

**Riešenie.** Uvedieme jeden z možných postupov vyriešenia tejto úlohy. Najprv doplníme výraz  $x^2 + 4x + 7$  na úplný štvorec:

$$x^2 + 4x + 7 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 7 = (x + 2)^2 + 3.$$

Zrejme pre každé  $x \in (-\infty; \infty)$  je

$$0 \leq (x + 2)^2 < \infty.$$

Ak ku každej strane týchto nerovnic pripočítame číslo 3, dostaneme

$$3 \leq (x + 2)^2 + 3 < \infty,$$

t.j.  $(x + 2)^2 + 3 \in \langle 3; \infty \rangle$ . Správna je odpoveď B.

---

---

8. Grafom funkcie danej predpisom  $f: y = (\sqrt{x})^2$  je:

A  B

C  D

A: úsečka B: priamka C: parabola D: polpriamka

---

**Riešenie.** V predpise funkcie  $f$  vystupuje výraz  $\sqrt{x}$ , ktorý je definovaný len pre  $x \geq 0$ . Druhá mocnina je definovaná pre každé reálne číslo, a preto definičným oborom funkcie  $f$  je interval  $\langle 0; \infty \rangle$ . Je zrejmé, že pre  $x \in \langle 0; \infty \rangle$  je  $(\sqrt{x})^2 = x$ . Z uvedených úvah vyplýva, že predpis funkcie  $f$  môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$f: y = x, \quad x \in \langle 0; \infty \rangle.$$

Grafom funkcie  $y = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , je priamka, ale pre funkciu  $f$  je  $x \in \langle 0; \infty \rangle$ . To znamená, že jej grafom je polpriamka (skúste ju načrtnúť), a preto správna odpoveď je D.

---

---

9. Jeden z priesečníkov grafov funkcií  $f: y = \frac{3}{x}$  a  $g: y = x - 2$  je bod so súradnicami:

A  B

C  D

A:  $[3; -1]$  B:  $[3; 1]$  C:  $[-3; 1]$  D:  $[1; 3]$

---

**Riešenie.** Pre  $x$ -ovú súradnicu priesečníka grafov funkcií  $f$  a  $g$  platí

$$\frac{3}{x} = x - 2, \quad x \neq 0.$$

Ak vynásobíme obe strany tejto rovnice výrazom  $x$ , dostaneme

$$3 = x^2 - 2x, \quad \text{t.j.} \quad 0 = x^2 - 2x - 3.$$

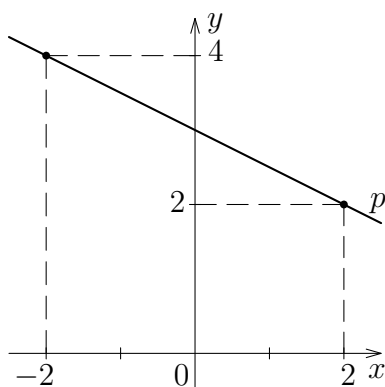
To je kvadratická rovnica s diskriminantom  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ . Jej korene sú  $x_1 = 3$  a  $x_2 = -1$  (hodnota  $x_2 = -1$  nevyhovuje žiadnej z ponúknutých možností). Hodnota funkcie  $f$  v bode  $x_1 = 3$  je  $y_1 = f(3) = \frac{3}{3} = 1$ , a teda bod so súradnicami  $[3; 1]$  je jeden z hľadaných priesečníkov, a preto je správna odpoveď B.

Túto úlohu sme mohli riešiť aj postupným overovaním toho, či ponúkané súradnice môžu byť súradnicami priesečníka grafov daných funkcií – napríklad odpoveď A nie je správna, lebo  $[3; -1]$  nie je bodom grafu funkcie  $f$ , pretože  $-1 \neq f(3)$ .

## 6.2 Úlohy

1. Priamka  $p$ , znázornená na obrázku,

A  B   
C  D

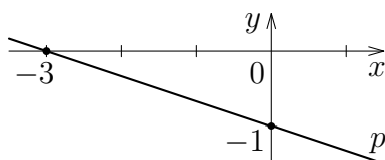


je grafom funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

A:  $y = -x + 4$    B:  $y = 3 - x$    C:  $y = 0,5 \cdot (6 - x)$    D:  $y = 3 - \frac{x^2}{4}$

2. Priamka  $p$ , znázornená na obrázku,

A  B   
C  D

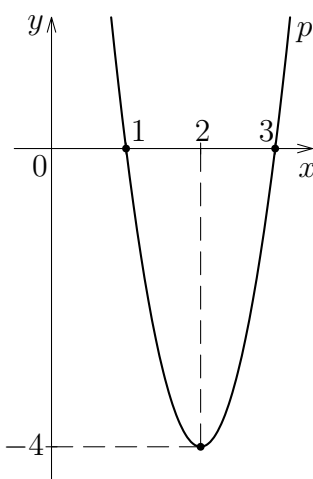


je grafom funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

A:  $y = 2(x + 3) - 1$    B:  $y = (x + 3)^2 - 10$    C:  $y = -\frac{(x + 3)^2}{9}$    D:  $y = -1 - \frac{x}{3}$

3. Parabola  $p$ , znázornená na obrázku,

A  B   
C  D

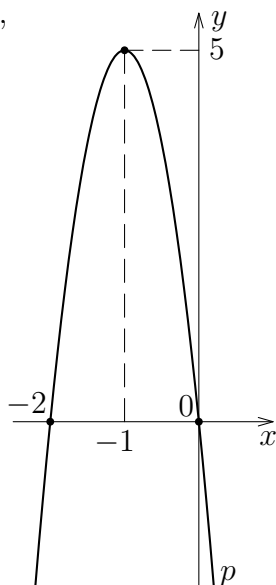


je grafom funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

A:  $y = (x - 1)(x - 3)$    B:  $y = (x + 1)(x + 3)$    C:  $y = -4(x - 1)^2(x - 3)^2$    D:  $y = 4x^2 - 16x + 12$

4. Parabola  $p$ , znázornená na obrázku,

A  B   
C  D

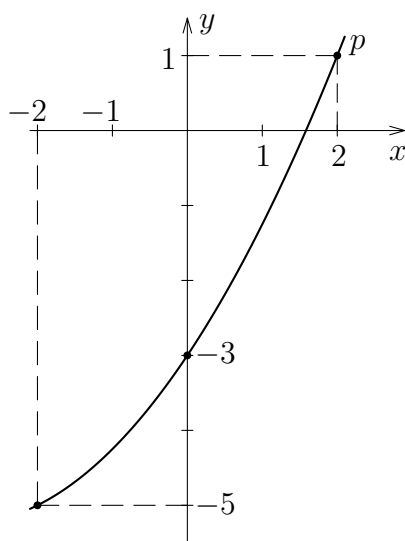


je grafom funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

A:  $y = x(x + 2)$    B:  $y = x(x + 2) + 5$    C:  $y = -5(2x + x^2)$    D:  $y = 5x^2(x + 2)$

5. Časť paraboly  $p$ , znázornená na obrázku,

A  B   
C  D



je časťou grafu funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

A:  $y = \frac{6x}{4} - 2$    B:  $y = \frac{x^4}{4} - 3$    C:  $y = \frac{x^2 + 6x - 12}{4}$    D:  $y = \frac{x^2 + 6x - 3}{4}$

6. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 3 - \cos(x + 2)$  je nepravdivé:

A  B   
C  D

A: je rastúca   B: je zhora ohraničená   C: je zdola ohraničená   D: je periodická

7. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 3^x - 2$  je pravdivé:

A  B   
C  D

A: je ohraničená   B: je zdola neohraničená   C: je neklesajúca   D: je periodická

- 
8. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 3 - x^3$  je pravdivé: A  B   
A: je ohraničená B: je rastúca C: je prostá D: je periodická C  D
- 
9. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = (x + 2)^2$  je pravdivé: A  B   
A: je neohraničená zdola B: je neohraničená zhora C: je prostá D: je nerastúca C  D
- 
10. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 5 - 2^{-x}$  je nepravdivé: A  B   
A: je ohraničená zdola B: je ohraničená zhora C: je rastúca D: je neklesajúca C  D
- 
11. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = 2 \cdot \sqrt{x} - 5$  je pravdivé: A  B   
A: je ohraničená zdola B: je ohraničená zhora C: je nerastúca D: je periodická C  D
- 
12. Funkcia  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$  nadobúda kladné hodnoty na množine: A  B   
A:  $(-2; 0) \cup (2; \infty)$  B:  $(0; \infty)$  C:  $(0; 2)$  D:  $(-2; 0)$  C  D
- 
13. Funkcia  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$  nadobúda nezáporné hodnoty na množine: A  B   
A:  $\langle 0; \infty$  B:  $\langle 0; 2) \cup (2; \infty)$  C:  $(-2; 0) \cup (2; \infty)$  D:  $(2; \infty)$  C  D
- 
14. Oborom hodnôt funkcie  $y = 7 - 3x$ ,  $x \in (-2; 1)$  je množina: A  B   
A:  $(-2; 1)$  B:  $\langle -3; 6)$  C:  $(5; 8)$  D:  $\langle 4; 13)$  C  D
- 
15. Oborom hodnôt funkcie  $y = 6 + 3 \sin x$  je množina: A  B   
A:  $\langle 3; 6)$  B:  $\langle 0; 3)$  C:  $\langle 3; 9)$  D:  $\langle 0; 6)$  C  D
- 
16. Oborom hodnôt funkcie  $y = 3 - 2^x$ ,  $x \in \langle 0; 3)$  je množina: A  B   
A:  $(-5; 2)$  B:  $\langle 0; 8)$  C:  $(-8; 3)$  D:  $(-5; 2)$  C  D
- 
17. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = x^2 + 3$  je pravdivé: A  B   
A: je rastúca B: je periodická C: číslo 2 je z jej oboru hodnôt D: nie je prostá C  D
- 
18. Rozhodnite, ktoré z tvrdení o funkcii  $y = \frac{4}{x}$  je pravdivé: A  B   
A: je neklesajúca B: je periodická C: je prostá D: je ohraničená C  D
- 
19. Grafom funkcie  $f: y = 3x - 1$ ,  $x \in \langle 2; 8)$  je: A  B   
A: úsečka B: priamka C: polpriamka D: izolovaný bod C  D
- 
20. Grafy funkcií  $f: y = 3x - 1$  a  $g: y = -2x + 14$  sa pretínajú v bode: A  B   
A:  $[3; 8]$  B:  $[3; -2]$  C:  $[-1; 14]$  D:  $[0; -1]$  C  D
- 
21. Priesečník grafov funkcií  $f: y = x^2 - 1$  a  $g: y = 2x - 1$ , ktorý leží v prvom kvadrante, má  $y$ -ovú súradnicu rovnú: A  B   
A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 C  D

## 7 Funkcie (základné vlastnosti, definičný obor a obor funkčných hodnôt)

### 7.1 Riešené príklady

---

---

1. Ak  $f(x) = 8x^2 + \frac{2}{x} + 5$ , tak hodnota  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  je:

A:  $-1$    B:  $\frac{27}{4}$    C:  $3$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A    B   
C    D

**Riešenie.** Do predpisu funkcie  $f(x) = 8x^2 + \frac{2}{x} + 5$  dosadíme za premennú  $x$  číslo  $-\frac{1}{2}$ .  
Dostaneme:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{-\frac{1}{2}} + 5 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot (-2) + 5 = 2 - 4 + 5 = 3.$$

Správna odpoveď je C.

---

---

2. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{5x - 3}$  je:

A:  $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$    B:  $\left(\frac{3}{5}; \infty\right)$    C:  $\left\langle \frac{3}{5}; \infty \right\rangle$    D:  $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$

A    B   
C    D

**Riešenie.** Párna odmocnina existuje len z nezáporných čísel, a preto výraz  $5x - 3$  musí byť nezáporný, t. j.

$$5x - 3 \geq 0.$$

Teda

$$\begin{aligned} 5x &\geq 3, \\ x &\geq \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie  $f$  je

$$D_f = \left\langle \frac{3}{5}; \infty \right\rangle.$$

Správna odpoveď je C.

---

---

3. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{2 - 3x}$  je:

A  B   
C  D

A:  $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$  B:  $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$  C:  $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$  D:  $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

---

**Riešenie.** Výraz  $\sqrt{2 - 3x}$  je definovaný, ak

$$2 - 3x \geq 0,$$

lebo druhá odmocnina existuje len z nezáporných čísel. Potom

$$\begin{aligned} -3x &\geq -2, \\ x &\leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Preto definičný obor danej funkcie  $f$  je

$$D_f = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right).$$

Správna odpoveď je A.

---

---

4. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{2x + 15}{\sqrt{8x + 13}}$  je:

A  B   
C  D

A:  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{13}{8}\right\}$  B:  $\left(-\frac{13}{8}; \infty\right)$  C:  $\left(-\frac{13}{8}; \infty\right)$  D:  $\left(-\infty; -\frac{13}{8}\right)$

---

**Riešenie.** Definičný obor funkcie určíme z podmienok, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný a menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule, t. j.

$$8x + 13 \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{8x + 13} \neq 0.$$

Tieto dve podmienky sú splnené, ak platí nerovnica

$$8x + 13 > 0,$$

ktorú vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned} 8x &> -13, \\ x &> -\frac{13}{8}. \end{aligned}$$

To znamená, že definičným oborom funkcie  $f$  je

$$D_f = \left(-\frac{13}{8}; \infty\right).$$

Správna odpoveď je C.

---

---

5. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log(3 - 2x) - \frac{x^2 - 6}{x + 1}$  je:

A  B   
C  D

A:  $(-\infty; \frac{3}{2})$  B:  $(-\infty; -1) \cup (-1; \frac{3}{2})$  C:  $(\frac{3}{2}; \infty)$  D:  $(-\infty; -1) \cup (-1; \frac{3}{2})$

---

**Riešenie.** Definičný obor danej funkcie určíme z podmienok, že logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, t. j.  $3 - 2x > 0$  a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j.  $x + 1 \neq 0$ . Teda musia byť splnené tieto dve podmienky:

$$3 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x + 1 \neq 0.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\begin{aligned} -2x > -3 & \quad \wedge \quad x \neq -1, \\ x < \frac{3}{2} & \quad \wedge \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie  $f$  je

$$D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{3}{2}).$$

Správna je odpoveď B.

---

---

6. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log \frac{x + 2}{3 - x}$  je:

A  B   
C  D

A:  $(-\infty; -2)$  B:  $(-2; 3)$  C:  $(-2; \infty)$  D:  $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

---

**Riešenie.** V predpise funkcie vystupuje zlomok a logaritmus. Menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule, t. j.

$$3 - x \neq 0,$$

teda  $x \neq 3$ .

Logaritmus je definovaný len pre kladný výraz, a preto musí byť splnená nerovnica

$$\frac{x + 2}{3 - x} > 0.$$

Túto nerovnicu môžeme riešiť metódou nulových bodov. Čitateľ zlomku v nerovnici je rovný nule pre  $x = -2$ , menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre  $x = 3$ . Tieto dva body rozdeľujú množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 3) \quad \text{a} \quad (3; \infty).$$

Dosadením ľubovoľných čísel z vnútra jednotlivých intervalov zistíme, v ktorých intervaloch výraz  $V(x) = \frac{x + 2}{3 - x}$  nadobúda kladné a v ktorých záporné hodnoty.

$$(-\infty; -2) : \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad V(-3) = \frac{-3 + 2}{3 - (-3)} = \frac{-1}{6} < 0,$$

$$(-2; 3) : \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = \frac{0 + 2}{3 - 0} = \frac{2}{3} > 0,$$

$$(3; \infty) : \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad V(4) = \frac{4 + 2}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6 < 0.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky, v ktorej vidno, že  $V(-2) = 0$  a  $V(3)$  neexistuje, čo sme zaznamenali symbolom  $*$ .

|        |                 |      |           |     |               |
|--------|-----------------|------|-----------|-----|---------------|
| $x$    | $(-\infty; -2)$ | $-2$ | $(-2; 3)$ | $3$ | $(3; \infty)$ |
| $V(x)$ | $-$             | $0$  | $+$       | $*$ | $-$           |

V rámci určenia definičného oboru funkcie  $f$  sme museli nájsť množinu tých  $x$ , pre ktoré je výraz  $V(x)$  kladný. Z tabuľky je teda zrejmé, že definičný obor funkcie  $f$  je

$$D_f = (-2; 3).$$

Správna je odpoveď B.

7. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt[4]{(x-8)(5-x)}$  je:

A  B

C  D

A:  $(-\infty; 8)$  B:  $(-\infty; 5) \cup (5; 8)$  C:  $\langle 8; \infty$  D:  $\langle 5; 8)$

**Riešenie.** Definičný obor funkcie určíme z podmienky, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný, t. j.

$$(x-8)(5-x) \geq 0.$$

Nerovnicu vyriešime intervalovou metódou. Výraz

$$V(x) = (x-8)(5-x)$$

je rovný nule pre  $x = 8$  alebo pre  $x = 5$ . Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$(-\infty; 5), \quad (5; 8) \quad \text{a} \quad (8; \infty).$$

Vyčíslením hodnoty výrazu  $V(x)$  v ľubovoľných bodoch jednotlivých intervalov zistíme, kde daný výraz nadobúda kladné a kde záporné hodnoty.

$$(-\infty; 5) : \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = (0-8)(5-0) = -40 < 0,$$

$$(5; 8) : \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad V(6) = (6-8)(5-6) = 2 > 0,$$

$$(8; \infty) : \quad x = 9 \quad \Rightarrow \quad V(9) = (9-8)(5-9) = -4 < 0.$$

Zistené poznatky sú zapísané v tabuľke, v ktorej je zrejmé, že  $V(5) = 0$  a  $V(8) = 0$ :

|        |                |     |          |     |               |
|--------|----------------|-----|----------|-----|---------------|
| $x$    | $(-\infty; 5)$ | $5$ | $(5; 8)$ | $8$ | $(8; \infty)$ |
| $V(x)$ | $-$            | $0$ | $+$      | $0$ | $-$           |

Z tabuľky je zrejmé, že výraz  $V(x)$  je nezáporný na množine

$$\{5\} \cup (5; 8) \cup \{8\} = \langle 5; 8),$$

čo je zároveň definičný obor funkcie  $f$ . Správna odpoveď je D.

8. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{\frac{4x+3}{7x-1}}$  je:

A  B   
C  D

A:  $(-\infty; -\frac{3}{4})$  B:  $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{1}{7}; \infty)$  C:  $(-\frac{3}{4}; \infty)$  D:  $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{1}{7}; \infty)$

**Riešenie.** Definičný obor funkcie určíme z podmienok, že menovateľ zlomku nesmie byť rovný nule, t. j.

$$7x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{7}$$

a pod druhou odmocninou môže byť len nezáporný výraz

$$\frac{4x+3}{7x-1} \geq 0.$$

Túto nerovnicu môžeme riešiť metódou nulových bodov. Čitateľ výrazu

$$V(x) = \frac{4x+3}{7x-1}$$

je rovný nule pre  $x = -\frac{3}{4}$ , menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre  $x = \frac{1}{7}$ . Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly:

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right), \quad \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right) \quad \text{a} \quad \left(\frac{1}{7}; \infty\right).$$

Na každom z týchto intervalov výraz  $V(x)$  nemení znamienko. Z každého intervalu stačí zvoliť jeden bod a vyčíslit v ňom hodnotu výrazu  $V(x)$ , ktorá môže byť len kladná alebo záporná.

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) : \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad V(-1) = \frac{4 \cdot (-1) + 3}{7 \cdot (-1) - 1} = \frac{-4 + 3}{-7 - 1} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8} > 0,$$

$$\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right) : \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = \frac{4 \cdot 0 + 3}{7 \cdot 0 - 1} = -3 < 0,$$

$$\left(\frac{1}{7}; \infty\right) : \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad V(1) = \frac{4 \cdot 1 + 3}{7 \cdot 1 - 1} = \frac{7}{6} > 0.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky, kde  $V\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$  a  $V\left(\frac{1}{7}\right)$  neexistuje:

|        |                           |                |                               |               |                         |
|--------|---------------------------|----------------|-------------------------------|---------------|-------------------------|
| $x$    | $(-\infty; -\frac{3}{4})$ | $-\frac{3}{4}$ | $(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7})$ | $\frac{1}{7}$ | $(\frac{1}{7}; \infty)$ |
| $V(x)$ | +                         | 0              | -                             | *             | +                       |

Úlohu nájsť definičný obor funkcie  $f$  sme preformulovali na úlohu zistiť, kedy je výraz  $V(x)$  kladný. Z tabuľky je zrejmé, že definičný obor funkcie  $f$  je

$$D_f = \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{7}; \infty\right).$$

Správna odpoveď je D.

## 7.2 Úlohy

---

1. Ak  $f(x) = \frac{2,01 - x^2}{x}$ , tak hodnota  $f\left(-\frac{1}{10}\right)$  je: A  B   
A: -20,2 B: -20 C: -0,2 D: 20,2 C  D

---

2. Ak  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^3} - 8$ , tak hodnota  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  je: A  B   
A:  $-\frac{47}{4}$  B:  $-\frac{61}{8}$  C:  $-\frac{1}{4}$  D:  $\frac{1}{4}$  C  D

---

3. Ak  $f(x) = 16x^2 - \frac{1}{x} - 3$ , tak hodnota  $f\left(-\frac{1}{4}\right)$  je: A  B   
A:  $-\frac{3}{2}$  B:  $-\frac{9}{4}$  C: 2 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

4. Ak  $f(x) = \frac{4 - 2x}{x^2}$ , tak hodnota  $f(-0,2)$  je: A  B   
A: -90 B: 11 C: 90 D: 110 C  D

---

5. Ak  $f(x) = 1 - x - 2x^2 - 3x^3$ , tak hodnota  $f(-1)$  je: A  B   
A: -5 B: -3 C: 3 D: 7 C  D

---

6. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{4 + 5x}{\sqrt{3x - 7}}$  je: A  B   
A:  $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$  B:  $\left\langle \frac{7}{3}; \infty \right\rangle$  C:  $\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$  D:  $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{3}\right\}$  C  D

---

7. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{6x + 14}}$  je: A  B   
A:  $\left\langle -\frac{7}{3}; \infty \right\rangle$  B:  $\left(-\frac{7}{3}; \infty\right)$  C:  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{3}\right\}$  D:  $\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$  C  D

---

8. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{8x - 7}{\sqrt{1 - 3x}}$  je: A  B   
A:  $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$  B:  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$  C:  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$  D:  $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$  C  D

---

9. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{x + 1}{\sqrt{3 - 5x}}$  je: A  B   
A:  $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$  B:  $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right\rangle$  C:  $\left(-\frac{3}{5}; \infty\right)$  D:  $\left(\frac{3}{5}; \infty\right)$  C  D

---

10. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{x + 4}{\sqrt{5 - 2x}}$  je: A  B   
A:  $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$  B:  $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right\rangle$  C:  $\left(\frac{5}{2}; \infty\right)$  D:  $\left\langle \frac{5}{2}; \infty \right\rangle$  C  D

---

11. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{(2x - 5)(x + 3)}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$  B:  $(-\infty; -3) \cup \left\langle \frac{5}{2}; \infty \right\rangle$  C:  $\left\langle \frac{5}{2}; \infty \right\rangle$  D:  $\left(\frac{5}{2}; \infty\right)$  C  D

---

12. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{(2x + 1)(x - 2)}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$  B:  $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle 2; \infty \rangle$  C:  $\left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$  D:  $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$  C  D

---

13. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{\frac{3x + 4}{1 + x}}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (-1; \infty)$  B:  $(-\infty; -\frac{4}{3}) \cup \langle -1; \infty \rangle$  C:  $\left\langle -\frac{4}{3}; \infty \right\rangle$  D:  $\left\langle -\frac{4}{3}; -1 \right\rangle \cup (-1; \infty)$  C  D

---

14. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{\frac{4x + 1}{2 - x}}$  je: A  B   
A:  $\left\langle -\frac{1}{4}; 2 \right\rangle$  B:  $\left\langle -\frac{1}{4}; \infty \right\rangle$  C:  $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (2; \infty)$  D:  $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup \langle 2; \infty \rangle$  C  D

---

15. Definičným oborom funkcie  $f : y = \sqrt{\frac{3x - 2}{1 - x}}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (1; \infty)$  B:  $\left\langle \frac{2}{3}; 1 \right\rangle$  C:  $\left\langle \frac{2}{3}; 1 \right\rangle$  D:  $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right\rangle$  C  D

---

16. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log(x + 3) - \frac{1}{3x + 1}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$  B:  $(-3; \infty)$  C:  $(-3; -\frac{1}{3}) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$  D:  $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$  C  D

---

17. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log_2(2 - x) - \frac{x + 3}{x}$  je: A  B   
A:  $\mathbb{R} - \{0; 2\}$  B:  $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$  C:  $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$  D:  $(0; 2)$  C  D

---

18. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 5) - \frac{2x}{x + 1}$  je: A  B   
A:  $\mathbb{R} - \{-1\}$  B:  $\langle -5; -1 \rangle \cup (-1; \infty)$  C:  $(-5; \infty)$  D:  $(-5; -1) \cup (-1; \infty)$  C  D

---

19. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log_4(4 - x) - \frac{5x - 1}{x + 2}$  je: A  B   
A:  $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$  B:  $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$  C:  $(4; \infty)$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

20. Definičným oborom funkcie  $f : y = \frac{x^2 - 1}{x} - \log(7 - x)$  je: A  B   
A:  $(-\infty; 0) \cup (0; 7)$  B:  $(-\infty; 0) \cup (0; 7)$  C:  $(7; \infty)$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

## 8 Riešenie kvadratických rovníc

### 8.1 Riešené príklady

Pri určovaní reálnych koreňov kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  s koeficientami  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  najprv určíme hodnotu jej diskriminantu  $D$ , ktorý je definovaný takto:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Ak je diskriminant  $D$  záporný, kvadratická rovnica nemá reálne riešenie. Ak je  $D \geq 0$ , tak reálne korene vypočítame podľa vzťahu<sup>2</sup>

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (8.1)$$

Ak  $x_1, x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , tak kvadratický trojčlen  $ax^2 + bx + c$  sa dá napísať v tvare súčinu koreňových činiteľov, t. j.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (8.2)$$

Ak  $x_1, x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + px + q = 0$ , tak medzi koreňmi  $x_1, x_2$  a koeficientami  $p, q$  kvadratickej rovnice platia Vietove vzťahy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned} \quad (8.3)$$

- 
- 
1. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 2x - 8 = 0$ , tak číslo  $x_2 - x_1$  je:    A     B   
A: 6    B: -2    C: 2    D: žiadna odpoveď nie je správna    C     D
- 

**Riešenie.** Korene danej rovnice vypočítame podľa vzťahu (8.1). V rovnici  $x^2 + 2x - 8 = 0$  je  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -8$ . Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36.$$

Korene  $x_1, x_2$  rovnice sú

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2}.$$

Hodnoty výrazu  $\frac{-2 \pm 6}{2}$  sú

$$\frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Keďže korene rovnice majú spĺňať podmienku  $x_1 < x_2$ , tak  $x_1 = -4$  a  $x_2 = 2$ .

Číslo  $x_2 - x_1$  vypočítame dosadením získaných koreňov:

$$x_2 - x_1 = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6.$$

Správna odpoveď je A.

---

<sup>2</sup>Ak  $D > 0$ , tak korene  $x_1$  a  $x_2$  sú rôzne, v prípade  $D = 0$  je  $x_1 = x_2$ , t. j. rovnica má jeden tzv. dvojnásobný koreň.

---

---

2. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $6x^2 + 5x + 1 = 0$ , tak číslo  $3x_2 + 2x_1$  je rovné: A  B

C  D

A: 0 B: -2 C: 2 D: žiadna odpoveď nie je správna

---

**Riešenie.** Korene kvadratickej rovnice  $6x^2 + 5x + 1 = 0$  vypočítame tak ako v príklade 1 podľa vzťahu (8.1), pričom  $a = 6$ ,  $b = 5$ ,  $c = 1$ . Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1.$$

Korene  $x_1, x_2$  rovnice sú:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm 1}{12}.$$

Keďže korene rovnice majú spĺňať podmienku  $x_1 < x_2$ , tak  $x_1$  zvolíme menší z koreňov rovnice. Teda:

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2},$$
$$x_2 = \frac{-5 + 1}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Hodnota výrazu  $3x_2 + 2x_1$  je:

$$3x_2 + 2x_1 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 = -2.$$

Správna je odpoveď B.

---

---

3. Ak kvadratická rovnica  $x^2 + px - 18 = 0$  má jeden koreň  $x_1 = -3$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $p$  sú: A  B

C  D

A:  $x_2 = 6, p = 3$  B:  $x_2 = 6, p = -9$  C:  $x_2 = 6, p = -3$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Na výpočet použijeme Vietove vzťahy (8.3)

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Keďže poznáme jeden koreň danej kvadratickej rovnice,  $x_1 = -3$ , a koeficient  $q = -18$ , dosadením do vzťahu

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

dostávame

$$-3x_2 = -18,$$

$$x_2 = 6.$$

Dosadením koreňov  $x_1 = -3, x_2 = 6$  do vzťahu

$$x_1 + x_2 = -p$$

vypočítame neznámy koeficient  $p$ :

$$\begin{aligned}-3 + 6 &= -p, \\ 3 &= -p, \\ p &= -3.\end{aligned}$$

Teda správna odpoveď je C.

- 
- 
4. Ak kvadratická rovnica  $x^2 + 8x + q = 0$  má jeden koreň  $x_1 = -5$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $q$  sú: A  B   
C  D
- A:  $x_2 = -3, q = -15$    B:  $x_2 = 3, q = 15$    C:  $x_2 = 13, q = 39$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 

**Riešenie.** Známy koreň  $x_1 = -5$  vyhovuje danej kvadratickej rovnici, a preto musí platiť rovnosť

$$(-5)^2 + 8 \cdot (-5) + q = 0.$$

Z nej určíme koeficient  $q$ :

$$\begin{aligned}25 - 40 + q &= 0, \\ -15 + q &= 0, \\ q &= 15.\end{aligned}$$

Keďže okrem koreňa  $x_1$  poznáme aj koeficient  $p = 8$ , dosadením do Vietovho vzťahu (8.3)

$$x_1 + x_2 = -p,$$

dostávame pre druhý koreň  $x_2$  rovnicu

$$-5 + x_2 = -8,$$

a teda

$$x_2 = -3.$$

Pretože v žiadnej z odpovedí A, B, C nie je uvedený výsledok  $x_2 = -3, q = 15$ , správna odpoveď je D.

- 
- 
5. Všetky korene rovnice  $x^2 - 4x - 21 = 0$  sú z intervalu: A  B   
C  D
- A:  $(-\infty; -10)$    B:  $\langle -10; 3 \rangle$    C:  $\langle -3; 10 \rangle$    D:  $\langle 7; \infty \rangle$
- 

**Riešenie.** Korene kvadratickej rovnice vypočítame podľa vzťahu (8.1). V danej rovnici je  $a = 1, b = -4, c = -21$ . Pre diskriminant rovnice platí

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 100.$$

Korene  $x_1, x_2$  danej rovnice sú:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 10}{2},$$

teda

$$x_1 = 7 \quad \text{a} \quad x_2 = -3.$$

Kedže  $7 \notin (-\infty; -10)$  a  $-3 \notin (-\infty; -10)$ , odpoveď A nie je správna. Kedže  $7 \notin \langle -10; 3 \rangle$ , odpoveď B je nesprávna. Z toho, že  $-3 \notin \langle 7; \infty \rangle$  dostávame, že D je nesprávna odpoveď. Správna odpoveď je C, pretože  $7 \in \langle -10; 3 \rangle$  a aj  $-3 \in \langle -10; 3 \rangle$ .

- 
- 
6. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $4x^2 - 25 = 0$ , tak číslo  $x_2 - x_1$  je:      A     B   
A: 5    B: 0    C: -5    D: 2      C     D
- 

**Riešenie.** Korene danej kvadratickej rovnice by sme mohli určiť napríklad podľa vzťahu (8.1), pričom  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = -25$ . Je to takzvaná neúplná kvadratická rovnica, chýba v nej lineárny člen  $bx$ . Môžeme ju však vyriešiť aj nasledovnými ekvivalentnými úpravami

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 25, & / : 4 \\ x^2 &= \frac{25}{4}, \\ |x| &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Z požiadavky  $x_1 < x_2$  dostaneme

$$x_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

Potom platí

$$x_2 - x_1 = \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{2} = 5.$$

Teda správna odpoveď je A.

- 
- 
7. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica  $2x^2 - x = 0$  je:      A     B   
A:  $2x^2 + 21x + 55 = 0$     B:  $2x^2 - 21x + 55 = 0$     C:  $9x^2 - 10x = 0$     D:  $x^2 - 10x + 5 = 0$       C     D
- 

**Riešenie.** Pretože rovnica  $2x^2 - x = 0$  je neúplná kvadratická rovnica, neobsahuje absolútny člen, môžeme ju riešiť napríklad rozkladom na súčinový tvar. Vyberieme  $x$  pred zátvorku a dostaneme

$$2x^2 - x = x \cdot (2x - 1).$$

Potom platí

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0),$$

teda

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Korene  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  hľadanej rovnice majú byť o 5 väčšie ako sú korene  $x_1$ ,  $x_2$ , teda

$$\begin{aligned}x_1^* &= 5 + x_1 = 5 + 0 = 5, \\x_2^* &= 5 + x_2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Keďže poznáme korene hľadanej kvadratickej rovnice, rovnicu môžeme získať zo súčinnového tvaru

$$\begin{aligned}(x - x_1^*) \cdot (x - x_2^*) &= 0, \\(x - 5) \cdot \left(x - \frac{11}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Po roznásobení dostávame rovnicu

$$x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{55}{2} = 0.$$

Keďže koeficienty všetkých ponúknutých rovníc v odpovediach sú celé čísla, túto rovnicu vynásobíme číslom 2:

$$2x^2 - 21x + 55 = 0,$$

čo je rovnica v odpovedi B.

---

---

8. Ak  $x_1$ ,  $x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 - 3x - 10 = 0$ , tak číslo  $x_1 \cdot x_2$  je dvojnásobný koreň rovnice:

A  B

C  D

---

A:  $x^2 - 20x - 100 = 0$  B:  $x^2 - 20x + 100 = 0$  C:  $x^2 + 20x + 100 = 0$  D:  $x^2 + 20x - 100 = 0$

---

**Riešenie.** Použitím Vietovych vzťahov (8.3) je možné určiť súčin  $x_1 \cdot x_2$  priamo z danej rovnice:

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Pre kvadratickú rovnicu  $x^2 - 3x - 10 = 0$  je

$$x_1 \cdot x_2 = q = -10,$$

čo má byť dvojnásobný koreň hľadanej kvadratickej rovnice.

Ak kvadratická rovnica  $ax^2 + bx + c = 0$  má dvojnásobný koreň, označme ho napríklad  $x_0$ , tak ju môžeme zapísať v tvare

$$a(x - x_0)(x - x_0) = 0,$$

t. j.

$$a(x - x_0)^2 = 0,$$

kde  $a$  je ľubovoľné reálne číslo,  $a \neq 0$ .

Vo všetkých ponúkaných odpovediach je koeficient  $a$  pri  $x^2$  rovný 1, a teda  $a = 1$ . Potom hľadanú kvadratickú rovnicu môžeme získať dosadením  $x_0 = -10$  do rovnice

$$(x - x_0)^2 = 0.$$

Dostaneme

$$(x + 10)^2 = 0$$

a po umocnení

$$x^2 + 20x + 100 = 0.$$

Správna odpoveď je C.

## 8.2 Úlohy

- 
1. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 2x - 15 = 0$ , tak číslo  $x_2 - x_1$  je: A  B   
A:  $-8$  B:  $-2$  C:  $0$  D:  $8$  C  D
- 
2. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 9x + 14 = 0$ , tak číslo  $2x_1 + x_2$  je: A  B   
A:  $-16$  B:  $-12$  C:  $-11$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
3. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + x - 12 = 0$ , tak číslo  $x_1 - 2x_2$  je: A  B   
A:  $-10$  B:  $-5$  C:  $2$  D:  $11$  C  D
- 
4. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 7x + 6 = 0$ , tak číslo  $x_1 - 3x_2$  je: A  B   
A:  $-19$  B:  $-9$  C:  $-3$  D:  $17$  C  D
- 
5. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 4x - 12 = 0$ , tak číslo  $2x_1 - x_2$  je: A  B   
A:  $-14$  B:  $-10$  C:  $-2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
6. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 - 8x + 12 = 0$ , tak číslo  $x_2 - x_1$  je: A  B   
A:  $-8$  B:  $-4$  C:  $4$  D:  $8$  C  D
- 
7. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $4x^2 - 5x + 1 = 0$ , tak číslo  $\frac{x_2}{x_1}$  je: A  B   
A:  $\frac{1}{4}$  B:  $\frac{3}{4}$  C:  $1$  D:  $4$  C  D
- 
8. Všetky korene rovnice  $2x^2 - 11x + 14 = 0$  sú z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 4)$  B:  $(-\infty; 2)$  C:  $\langle 0; 2 \rangle$  D:  $(2; 4)$  C  D
- 
9. Všetky korene rovnice  $4x + 5 = x^2$  sú z intervalu: A  B   
A:  $\langle -5; 5 \rangle$  B:  $(-5; 5)$  C:  $\langle -1; 0 \rangle$  D:  $\langle 0; 5 \rangle$  C  D
- 
10. Ak kvadratická rovnica  $x^2 + px + 10 = 0$  má jeden koreň  $x_1 = -5$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $p$  sú: A  B   
A:  $x_2 = -2, p = -7$  B:  $x_2 = -2, p = 7$  C:  $x_2 = 2, p = 7$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
11. Ak kvadratická rovnica  $x^2 + px - 12 = 0$  má jeden koreň  $x_1 = 4$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $p$  sú: A  B   
A:  $x_2 = -8, p = 11$  B:  $x_2 = -3, p = -1$  C:  $x_2 = -3, p = 7$  D:  $x_2 = 3, p = 1$  C  D

- 
12. Ak kvadratická rovnica  $x^2 + px - 16 = 0$  má jeden koreň  $x_1 = 8$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $p$  sú: A  B   
C  D   
A:  $x_2 = -8, p = 4$  B:  $x_2 = -2, p = -6$  C:  $x_2 = -2, p = 6$  D:  $x_2 = 2, p = -6$
- 
13. Ak kvadratická rovnica  $x^2 - 2x + q = 0$  má jeden koreň  $x_1 = 4$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $q$  sú: A  B   
C  D   
A:  $x_2 = -2, q = -8$  B:  $x_2 = -\frac{1}{2}, q = -2$  C:  $x_2 = \frac{1}{2}, q = 2$  D:  $x_2 = 2, q = 8$
- 
14. Ak kvadratická rovnica  $x^2 - x + q = 0$  má jeden koreň  $x_1 = 6$ , tak druhý koreň  $x_2$  a koeficient  $q$  sú: A  B   
C  D   
A:  $x_2 = -5, q = -30$  B:  $x_2 = -3, q = -18$  C:  $x_2 = 2, q = 12$  D:  $x_2 = 5, q = 30$
- 
15. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 2 menšie ako rovnica  $x^2 + 5x - 14 = 0$  je: A  B   
C  D   
A:  $x^2 - 9x = 0$  B:  $x^2 - 3x + 12 = 0$  C:  $x^2 + 3x - 12 = 0$  D:  $x^2 + 9x = 0$
- 
16. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica  $x^2 - 5x + 6 = 0$  je: A  B   
C  D   
A:  $x^2 - 15x + 56 = 0$  B:  $x^2 - 10x + 1 = 0$  C:  $x^2 - 6x + 5 = 0$  D:  $x^2 + 11 = 0$
- 
17. Jedna z kvadratických rovníc, ktorých korene sú dvojnásobkami koreňov kvadratickej rovnice  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  je: A  B   
C  D   
A:  $8x^2 - 10x + 2 = 0$  B:  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  C:  $x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$  D:  $x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$
- 
18. Ak  $x_1, x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 - x - 2 = 0$ , tak číslo  $x_1 \cdot x_2$  je dvojnásobný koreň rovnice: A  B   
C  D   
A:  $2x^2 - 2x + 4 = 0$  B:  $x^2 - 4x + 2 = 0$  C:  $x^2 - x - 2 = 0$  D:  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- 
19. Ak  $x_1, x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 - 9x + 8 = 0$ , tak číslo  $x_1 + x_2$  je dvojnásobný koreň rovnice: A  B   
C  D   
A:  $x^2 - 18x + 81 = 0$  B:  $x^2 - 10x + 8 = 0$  C:  $x^2 - 9x + 7 = 0$  D:  $x^2 - 9x + 9 = 0$
- 
20. Ak  $x_1, x_2$  sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , tak číslo  $x_1 \cdot x_2$  je dvojnásobný koreň rovnice: A  B   
C  D   
A:  $x^2 - 4x - 4 = 0$  B:  $x^2 - 4x + 4 = 0$  C:  $x^2 + 4x - 4 = 0$  D:  $x^2 + 4x + 4 = 0$

## 9 Exponenciálne výrazy a logaritmy

### 9.1 Riešené príklady

Pripomeňme si základné vlastnosti exponenciálnych výrazov. Pre ľubovoľné reálne čísla  $x$  a  $y$  a kladné číslo  $a$ ,  $a \neq 1$ , platí:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, \quad (9.1)$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (9.2)$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad (9.3)$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}. \quad (9.4)$$

S exponenciálnymi výrazmi úzko súvisí definícia logaritmu kladného čísla  $x$  pri základe  $a$ :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \quad \text{kde } a > 0, a \neq 1, x > 0. \quad (9.5)$$

Pri riešení logaritmických rovníc budeme potrebovať nasledujúce základné vlastnosti logaritmov. Nech  $x$  a  $y$  sú ľubovoľné kladné čísla a  $a$  je kladné číslo rôzne od jednej. Potom platí:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y. \quad (9.6)$$

$$\log_a a = 1, \quad (9.7)$$

$$\log_a 1 = 0, \quad (9.8)$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y), \quad (9.9)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \quad (9.10)$$

$$\log_a x^s = s \cdot \log_a x, \quad \text{pre ľubovoľné reálne číslo } s. \quad (9.11)$$

---

1. Všetky riešenia rovnice  $9^{x+4} = 81^{2x-1}$  sú z intervalu:

A: (0; 2)    B: (4;  $\infty$ )    C: (3; 4)    D: (-4; 2)

A     B

C     D

---

**Riešenie.** Pretože

$$81 = 9^2,$$

tak obe strany danej exponenciálnej rovnice môžeme upraviť na rovnaký základ 9. Potom rovnica nadobudne tvar

$$9^{x+4} = (9^2)^{2x-1}.$$

Pravá strana tejto rovnice sa dá na základe (9.4) upraviť takto:

$$9^{x+4} = 9^{4x-2}.$$

Odtiaľ podľa (9.1) je

$$x + 4 = 4x - 2,$$

a teda

$$x = 2.$$

Správna odpoveď je D.

---

---

2. Riešením rovnice  $3^{x+1} + 3^{x+2} + 15 \cdot 3^x = 27$  je číslo, ktoré je:

A  B

A: nepárne B: väčšie ako 2 C: menšie ako 1 D: záporné

C  D

---

**Riešenie.** Podľa (9.2) pre  $a = 3$  je

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x \quad \text{a} \quad 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x.$$

Daná rovnica je takto ekvivalentná s rovnicou

$$3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 15 \cdot 3^x = 27.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}(3 + 9 + 15) \cdot 3^x &= 27, \\ 27 \cdot 3^x &= 27, \quad / : 27 \\ 3^x &= 1, \\ 3^x &= 3^0.\end{aligned}$$

Odtiaľ na základe (9.1) je

$$x = 0.$$

Správna odpoveď je C.

---

---

3. Všetky riešenia rovnice  $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$  sú z intervalu:

A  B

A:  $(-1; 3)$  B:  $(2; \infty)$  C:  $(-3; 2)$  D:  $(4; 8)$

C  D

---

**Riešenie.** Upravíme výrazy  $4^{x+1}$ , resp.  $4^{x-1}$  ľavej strany danej rovnice použijúc vzťahy (9.2), resp. (9.3), v ktorých  $a = 4$ :

$$4^x \cdot 4^1 - 8 \cdot \frac{4^x}{4^1} = 32.$$

Ďalej jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}4^x \cdot 4 - 4^x \cdot 2 &= 32, \\ 4^x \cdot (4 - 2) &= 32, \\ 4^x \cdot 2 &= 32, \\ 4^x &= 16.\end{aligned}$$

Keďže  $16 = 4^2$ , tak posledná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$4^x = 4^2,$$

z ktorej vzhľadom na (9.1) je

$$x = 2.$$

Číslo 2 patrí do jediného z uvedených intervalov, a to do intervalu  $(-1; 3)$ . Preto správna odpoveď je A.

---

---

4. Ak  $\log_5 x = 2$ , tak  $\log_5 x^3$  je:

A: 6    B: 2    C: 5    D: 3

A     B

C     D

**Riešenie.** Využijeme vzťah (9.11)

$$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x = 3 \cdot 2 = 6.$$

Správna odpoveď je A.

---

---

5. Ak  $\log_3 x = 4$ , tak  $\log_9 x$  je:

A: 1    B: 2    C: 3    D: 4

A     B

C     D

**Riešenie.** Zo vzťahu (9.5) vyplýva

$$\log_3 x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^4 = 81.$$

Ak do výrazu  $\log_9 x$  dosadíme za  $x$  číslo 81, využijúc vzťahy (9.11), (9.7) dostávame

$$\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2 \cdot \log_9 9 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Teda správna je odpoveď B.

---

---

6. Ak  $\log x = 2$ , tak  $\log_x 10\,000$  je:

A: 1    B: 2    C: 10    D: 100

A     B

C     D

**Riešenie.** Zo vzťahu (9.5) vyplýva

$$\log x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^2 = 100.$$

Ak do výrazu  $\log_x 10\,000$  dosadíme za  $x$  číslo 100 a využijeme vzťahy (9.11), (9.7) dostávame

$$\log_{100} 10\,000 = \log_{100} 100^2 = 2 \cdot \log_{100} 100 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Teda správna je odpoveď B.

---

---

7. Koreň rovnice  $\log_3(x+3) - 3 \cdot \log_3 2 = 1$  je:

A: párne číslo    B: prvočíslo    C: deliteľný tromi    D: deliteľný piatimi

A     B

C     D

**Riešenie.** Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla. Preto musí byť splnená podmienka:

$$x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3.$$

Využijúc vzťah (9.11) môžeme danú rovnicu zapísať v tvare

$$\log_3(x+3) - \log_3 2^3 = 1$$

a podľa (9.10) je

$$\log_3 \frac{x+3}{2^3} = 1.$$

Pravú stranu rovnice, číslo 1, zapíšeme v tvare logaritmu podľa vzťahu (9.7). Potom

$$\log_3 \frac{x+3}{8} = \log_3 3.$$

Z vlastnosti (9.6) dostaneme rovnicu

$$\frac{x+3}{8} = 3,$$

ktorú vyriešime jednoduchými úpravami:

$$x+3 = 24,$$

$$x = 21.$$

Číslo 21 spĺňa podmienku  $x > -3$ , a teda je koreňom danej rovnice. Keďže 21 nie je párne číslo, odpoveď A nie je správna. Číslo 21 nie je prvočíslo, lebo  $21 = 3 \cdot 7$ , a preto odpoveď B nie je správna. Číslo 21 je deliteľné tromi, a teda správna odpoveď je C.

---

---

8. Koreň rovnice  $\log_3(x+2) + \log_3(x-1) = 2\log_3 x$  je:

A  B

A: nepárne číslo B: párne číslo C: deliteľný tromi D: deliteľný piatimi

C  D

**Riešenie.** Súčasťou riešenia logaritmických rovníc je určenie podmienok, pri ktorých všetky výrazy v rovnici existujú. Výraz  $\log t$  je definovaný len pre kladné čísla  $t$ .

Výrazy v danej rovnici sú definované, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

$$x+2 > 0 \quad \wedge \quad x-1 > 0 \quad \wedge \quad x > 0,$$

t. j.

$$x > -2 \quad \wedge \quad x > 1 \quad \wedge \quad x > 0.$$

Z toho vyplýva, že  $x > 1$ .

Danú rovnicu najprv vhodnými úpravami prepíšeme na tvar

$$\log_3 V_1(x) = \log_3 V_2(x).$$

Ľavú stranu rovnice upravíme podľa vzťahu (9.9), pri úprave pravej strany využijeme vzťah (9.11). Teda rovnicu

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-1) = 2\log_3 x$$

napišeme v tvare:

$$\log_3 [(x+2) \cdot (x-1)] = \log_3 x^2.$$

Odtiaľ na základe vlastnosti (9.6) dostaneme rovnicu

$$(x+2) \cdot (x-1) = x^2.$$

Túto rovnicu vyriešime ekvivalentnými úpravami

$$x^2 + x - 2 = x^2,$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Párne číslo 2 spĺňa podmienku  $x > 1$ , teda je koreňom danej rovnice. Správna je odpoveď B.

## 9.2 Úlohy

- 
1. Rovnica  $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}$  má v množine reálnych čísel: A  B   
A: 0 riešení B: 1 riešenie C: 2 riešenia D: 3 riešenia C  D
- 
2. Rovnica  $3^{2x-5} = 243$  má v množine reálnych čísel jediný koreň, ktorý je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; -3)$  B:  $\langle -3; 3 \rangle$  C:  $\langle 3; 243 \rangle$  D:  $\langle 243; \infty \rangle$  C  D
- 
3. Rovnica  $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 39$  má v množine reálnych čísel jeden koreň, ktorý je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 0)$  B:  $\langle 0; 1 \rangle$  C:  $\langle 1; 39 \rangle$  D:  $\langle 39; \infty \rangle$  C  D
- 
4. Rovnica  $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je: A  B   
A: rovné číslu  $-1$  B: menšie ako 1 C: väčšie ako 2 D: z intervalu  $\langle 3; 9 \rangle$  C  D
- 
5. Rovnica  $3^x \cdot 4 + 3^x \cdot 3 + 3^x = 216$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je: A  B   
A: záporné B: dvojciferné C: párne D: deliteľné tromi C  D
- 
6. Súčin koreňov rovnice  $4^{x^2-2x-15} = 1$  v množine reálnych čísel je: A  B   
A:  $-15$  B:  $-5$  C: 2 D: 15 C  D
- 
7. Ak  $\log_2 x = 2$ , tak  $\log_2 x^3$  je: A  B   
A: 2 B: 4 C: 6 D: 8 C  D
- 
8. Ak  $\log x = 2$ , tak  $\log_x 100$  je: A  B   
A: 0 B:  $\frac{1}{2}$  C: 1 D: 100 C  D
- 
9. Ak  $\log_2 x = 4$ , tak  $\log_4 x$  je: A  B   
A: 2 B: 4 C: 8 D: 16 C  D
- 
10. Ak  $\log_3 x = 2$ , tak  $4 \cdot \log_x 81$  je: A  B   
A: 2 B: 4 C: 8 D: 9 C  D
- 
11. Ak  $\log_4 x^2 = 1$ , tak  $\frac{1}{2} \cdot \log_4 x$  je: A  B   
A: 0 B:  $\frac{1}{4}$  C:  $\frac{1}{2}$  D: 1 C  D
- 
12. Ak  $\log_5 x^2 = 4$ , tak  $3 \cdot \log_5 x$  je: A  B   
A: 1 B: 2 C: 3 D: 6 C  D
-

13. Ak  $\log x^{10} = 20$ , tak  $7 \cdot \log x$  je: A  B   
A: 1 B: 7 C: 14 D: 140 C  D
- 
14. Rovnica  $\log_4(x + 3) = 0$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je: A  B   
A: záporné B: dvojciferné C: nepárne D: deliteľné piatimi C  D
- 
15. Rovnica  $\log_3(2x + 5) = 4$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 2)$  B:  $\langle 2; 5)$  C:  $\langle 5; 38)$  D:  $\langle 38; \infty)$  C  D
- 
16. Rovnica  $\log_8(3x - 1) = 1$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 3)$  B:  $\langle 3; 8)$  C:  $\langle 8; 27)$  D:  $\langle 27; \infty)$  C  D
- 
17. Rovnica  $\log_{0,2}(2x - 7) = 0$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 0,2)$  B:  $\langle 0,2; 4)$  C:  $\langle 4; 7)$  D:  $\langle 7; \infty)$  C  D
- 
18. Rovnica  $\log_5\left(2x - \frac{9}{4}\right) - \log_5(x - 3) = \log_5 x$  v množine reálnych čísel: A  B   
A: nemá riešenie B: má jedno riešenie C: má dve riešenia D: má nekonečne veľa riešení C  D
- 
19. Rovnica  $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$  v množine reálnych čísel: A  B   
A: nemá riešenie B: má jedno riešenie C: má dve riešenia D: má nekonečne veľa riešení C  D
- 
20. Rovnica  $\log^2 x - \log x = 0$  má v množine reálnych čísel dve riešenia, pričom obidve sú: A  B   
A: menšie ako 0 B: kladné C: väčšie ako 2 D: párne C  D

## 10 Priamka, polpriamka a úsečka v rovine

### 10.1 Riešené príklady

Na úvod zhrnieme základné poznatky súvisiace s priamkami, polpriamkami a s úsečkami v rovine.

Ak je priamka daná bodom  $A = [a_1; a_2]$  a nenulovým smerovým vektorom  $\vec{s} = (s_1; s_2)$ , tak jej parametrické rovnice sú:

$$x = a_1 + s_1 t, \quad y = a_2 + s_2 t, \quad (10.1)$$

kde  $t \in \mathbb{R}$  je parameter. Ak parameter  $t$  nadobúda hodnoty z intervalu typu  $(-\infty; d]$  alebo z intervalu typu  $\langle c; \infty)$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ , tak rovnica (10.1) je analytickým vyjadrením polpriamky. V prípade, ak je  $t$  z uzavretého intervalu  $\langle c; d]$ , tak rovnica (10.1) vyjadruje úsečku, pričom hodnote parametra  $t = c$  zodpovedá v (10.1) jeden krajný bod úsečky a hodnote  $t = d$  zodpovedá jej druhý krajný bod.

Ak poznáme dva rôzne body  $A = [a_1; a_2]$  a  $B = [b_1; b_2]$ , ktoré ležia na priamke, môžeme jeden zo smerových vektorov priamky určiť pomocou vzťahu

$$\vec{s} = B - A = (b_1 - a_1; b_2 - a_2). \quad (10.2)$$

Normálový vektor  $\vec{n} = (n_1; n_2)$  priamky je nenulový vektor, ktorý je kolmý na jej smerový vektor  $\vec{s} = (s_1; s_2)$ . Dva nenulové vektory sú na seba kolmé práve vtedy, keď ich skalárny súčin je rovný nule. Z toho vyplýva, že súradnice jedného z normálových vektorov môžeme dostať tak, že zameníme poradie súradníc smerového vektora a pri jednej súradnici (ľubovoľnej) zmeníme znamienko na opačné, t. j. napríklad

$$\vec{n} = (n_1; n_2) = (s_2; -s_1). \quad (10.3)$$

Ak sú dve priamky  $p$  a  $q$  na seba kolmé, tak aj ich smerové vektory sú na seba kolmé, teda

$$\vec{s}_p \perp \vec{s}_q$$

a aj ich normálové vektory sú tiež na seba kolmé, t. j.

$$\vec{n}_p \perp \vec{n}_q.$$

Keďže pre priamky  $p$  a  $q$  platí

$$\vec{s}_p \perp \vec{n}_p, \quad \vec{s}_q \perp \vec{n}_q$$

dostávame, že pre kolmé priamky platí

$$\vec{s}_p \parallel \vec{n}_q, \quad \vec{s}_q \parallel \vec{n}_p. \quad (10.4)$$

Dva nenulové vektory  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  a  $\vec{v} = (v_1; v_2)$  sú rovnobežné (kolineárne) práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého, t. j.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \ell \vec{v}, \\ (u_1; u_2) &= (\ell v_1; \ell v_2), \end{aligned}$$

kde  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Všeobecná rovnica priamky  $p$  je

$$ax + by + c = 0, \quad (10.5)$$

kde  $a, b$  sú súradnice normálového vektora  $\vec{n}$  priamky, t. j.  $\vec{n} = (a, b)$ .

Smernicový tvar rovnice priamky  $p$  je

$$y = kx + q. \quad (10.6)$$

Číslo  $k$  sa nazýva smernica priamky. Poznamenajme, že

$$k = \operatorname{tg} \alpha, \quad (10.7)$$

kde  $\alpha$  je veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamka s kladnou časťou osi  $x$ . Číslo  $q$  predstavuje „úsek“, ktorý vytína priamka na osi  $y$ , t. j. bod  $[0; q]$  je priesečníkom danej priamky s osou  $y$ .

Ak poznáme dva body  $A = [a_1; a_2]$ ,  $B = [b_1; b_2]$ ,  $a_1 \neq b_1$ , ktoré ležia na priamke, môžeme smernicu priamky určiť tiež pomocou vzťahu

$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}. \quad (10.8)$$

---

1. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi  $M = [3; 5]$ ,  $N = [9; 7]$  sú:

A  B

A:  $x = 3 + 3t$ ,  $y = 5 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     B:  $x = 3 + t$ ,  $y = 5 + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     C:  $x = 3 + 3t$ ,  $y = 5 - t$ ,  
 $t \in \mathbb{R}$     D:  $x = 3 - t$ ,  $y = 5 + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$

C  D

---

**Riešenie.** Na zápis parametrických rovníc (10.1) priamky potrebujeme poznať jeden bod ležiaci na tejto priamke (na základe ponúknutých odpovedí zvolme napríklad bod  $M = [3; 5]$ ). Smerový vektor priamky je napríklad vektor určený bodmi  $M$  a  $N$  podľa vzťahu (10.2):

$$\vec{s} = M - N = (3 - 9; 5 - 7) = (-6; -2) = -2 \cdot (3; 1).$$

Keďže vektory  $(-6; -2)$  a  $(3; 1)$  sú kolieárne, je aj vektor  $(3; 1)$  smerovým vektorom danej priamky. Dosadením súradníc bodu  $M$  a súradníc smerového vektora do (10.1) dostávame požadované parametrické rovnice

$$x = 3 + 3t, \quad y = 5 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dá sa ukázať, že zo smerových vektorov ponúknutých štyroch vyjadrení priamok  $(3; 1)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(3; -1)$  a  $(-1; 3)$  – je len prvý kolieárny s vektorom  $(-6; -2)$ , a teda správna odpoveď je A.

---

2. Priamka prechádzajúca bodmi  $A = [2; -1]$ ,  $B = [5; 4]$  má smernicu rovnú:

A  B

A:  $\frac{5}{3}$     B:  $-\frac{5}{3}$     C:  $\frac{3}{5}$     D:  $-\frac{3}{5}$

C  D

---

**Riešenie.** Keďže pre prvé súradnice bodov  $A$  a  $B$  platí

$$2 = a_1 \neq b_1 = 5,$$

tak smernicu  $k$  priamky určíme pomocou vzťahu (10.8):

$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{4 - (-1)}{5 - 2} = \frac{5}{3}.$$

Teda správna odpoveď je A.

- 
- 
3. Jedna zo všeobecných rovníc priamky prechádzajúcej bodmi  $M = [1; 2]$  a  $N = [3; -1]$  je: A  B   
A:  $3x + 2y - 7 = 0$  B:  $2x - 3y + 4 = 0$  C:  $3x - 2y + 1 = 0$  D:  $x + 4y - 9 = 0$  C  D
- 
- 

**Riešenie.** Na určenie všeobecnej rovnice priamky  $ax + by + c = 0$  potrebujeme jej normálový vektor. Ten môžeme určiť napríklad zo smerového vektora priamky. Daná priamka prechádza bodmi  $M = [1; 2]$  a  $N = [3; -1]$ , teda jej smerový vektor je podľa (10.2) napríklad

$$\vec{s} = M - N = (1 - 3; 2 - (-1)) = (-2; 3).$$

Normálový vektor  $\vec{n}$  priamky dostaneme známou zámennou súradníc smerového vektora a zmenou znamienka jednej zo súradníc (pozri (10.3)):

$$\vec{n} = (3; 2).$$

Po dosadení do všeobecnej rovnice priamky dostávame

$$3x + 2y + c = 0.$$

Keďže daná priamka prechádza bodom  $M = [1; 2]$ , musia jeho súradnice  $x = 1$  a  $y = 2$  vyhovovať rovnici priamky, teda

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + c = 0.$$

Odtiaľ určíme koeficient  $c$ :

$$\begin{aligned} 7 + c &= 0, \\ c &= -7. \end{aligned}$$

Zhrnutím dostávame všeobecnú rovnicu danej priamky

$$3x + 2y - 7 = 0.$$

Preto je správna odpoveď A.

Poznamenávame, že pre ľubovoľné reálne číslo  $\ell \neq 0$  je aj rovnica

$$(3\ell)x + (2\ell)y - (7\ell) = 0.$$

všeobecnou rovnicou danej priamky.

---

---

4. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi  $x = -4 + 5t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,  $t \in \langle -1; 3 \rangle$  sú: A  B   
A:  $[1; -1]$  B:  $[-4; 2]$  C:  $[-9; 5]$  D:  $[11; -7]$  C  D
- 
- 

**Riešenie.** Stred  $S = [x_s; y_s]$  danej úsečky zodpovedá v (10.1) stred intervalu  $\langle -1; 3 \rangle$ , ktorý označíme symbolom  $t_s$ . Stred intervalu je aritmetický priemer krajných bodov intervalu, t. j.

$$t_s = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} x_s &= -4 + 5t_s = -4 + 5 \cdot 1 = -4 + 5 = 1, \\ y_s &= 2 - 3t_s = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1. \end{aligned}$$

Teda

$$S = [x_s; y_s] = [1; -1].$$

Správna odpoveď je A.

---

---

5. Jeden z normálových vektorov priamok kolmých na priamku danú parametrickými rovnicami  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -1 + 5t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  je:

A  B

C  D

A: (3; 5) B: (-3; 5) C: (5; 3) D: (5; -3)

---

**Riešenie.** Jeden zo smerových vektorov danej priamky, označme ju  $p$ , je podľa parametrických rovníc (10.1) vektor

$$\vec{s}_p = (3; 5).$$

Nech  $q$  je ľubovoľná priamka kolmá na danú priamku  $p$ . Potom normálový vektor všetkých priamok kolmých na priamku  $p$  je na základe (10.4) napríklad vektor

$$\vec{n}_q = (3; 5).$$

Správna odpoveď je A.

---

---

6. Priamka daná rovnicou  $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$  zvierá s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti:

A  B

A:  $\frac{\pi}{6}$  B:  $\frac{\pi}{4}$  C:  $\frac{\pi}{3}$  D:  $\frac{\pi}{2}$

C  D

---

**Riešenie.** Požadovanú veľkosť uhla dostaneme zo smernicového tvaru (10.6) rovnice priamky na základe vzťahu (10.7).

Upravme všeobecnú rovnicu danej priamky na smernicový tvar, čo dosiahneme vyjadrením premennej  $y$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x - y - 4 &= 0, & / + y \\ y &= \sqrt{3}x - 4.\end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame smernicu  $k = \sqrt{3}$  a na základe (10.7) je

$$\operatorname{tg} \alpha = k = \sqrt{3}.$$

Z tabuľky na strane 88 dostaneme hodnotu  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Správna odpoveď je C.

---

---

7. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom  $A = [2; 3]$  a zvierajúcej s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti  $-\frac{\pi}{4}$  je:

A  B

C  D

A:  $x + y - 5 = 0$  B:  $x - y + 1 = 0$  C:  $\sqrt{2}x - 2y + 6 - 2\sqrt{2} = 0$  D:  $\sqrt{2}x + 2y - 6 - 2\sqrt{2} = 0$

---

**Riešenie.** Najprv určíme smernicový tvar danej priamky  $p$ . Na základe (10.7) je smernica priamky

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -1.$$

Dosadením do smernicového tvaru (10.6) priamky dostávame rovnicu priamky

$$y = -x + q.$$

Táto priamka má prechádzať bodom  $A = [2; 3]$ , a preto jeho súradnice  $x = 2$  a  $y = 3$  musia vyhovovať tejto rovnici. Teda

$$3 = -2 + q$$

a odtiaľ

$$q = 5.$$

Teda smernicový tvar priamky je

$$y = -x + 5.$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu danej priamky

$$x + y - 5 = 0.$$

Správna odpoveď je A.

---

---

8. Priamka  $p_1$  má všeobecnú rovnicu  $2x + 3y - 1 = 0$  a priamka  $p_2$  má parametrické rovnice  $x = 2 + 4t$ ,  $y = -1 - 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Priamky  $p_1$  a  $p_2$  sú:

A  B

C  D

A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Je známe, že

1. dve priamky sú rôznobežné práve vtedy, keď majú len jeden spoločný bod;
2. dve priamky sú rovnobežné, ale rôzne práve vtedy, keď nemajú spoločný bod;
3. dve priamky sú totožné práve vtedy, keď majú nekonečne veľa spoločných bodov.

Takto nám stačí zistiť, koľko spoločných bodov majú dané priamky. Ak  $P = [x; y]$  je nejaký spoločný bod týchto priamok, tak jeho súradnice vyhovujú všetkým rovniciam, ktorými sú priamky dané, t. j. spĺňajú tieto tri rovnice:

$$2x + 3y - 1 = 0 \quad \wedge \quad x = 2 + 4t \quad \wedge \quad y = -1 - 3t. \quad (10.9)$$

Ak dosadíme vyjadrenia  $x$  a  $y$  z druhej a tretej rovnice do prvej rovnice, dostaneme rovnicu

$$2(2 + 4t) + 3(-1 - 3t) - 1 = 0.$$

Jednoduchými úpravami získame

$$\begin{aligned} 4 + 8t - 3 - 9t - 1 &= 0, \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Z druhej a tretej rovnice v (10.9) je

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4 \cdot 0 = 2, \\ y &= -1 - 3 \cdot 0 = -1. \end{aligned}$$

Zistili sme, že sústava (10.9) má jediné riešenia, a teda bod  $P = [2; -1]$  je jediným spoločným bodom daných priamok. Priamky  $p_1$  a  $p_2$  sú rôznobežné. Správna odpoveď je A.

---

---

9. Priamka  $p$  má všeobecnú rovnicu  $6x - 4y + 5 = 0$  a priamka  $q$  má parametrické rovnice  $x = -\frac{1}{2} + 2t$ ,  $y = \frac{1}{2} + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Priamky  $p$  a  $q$  sú:

A  B

C  D

A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

---

**Riešenie.** Pri určovaní vzájomnej polohy dvoch priamok  $p$  a  $q$  v rovine nám môžu pomôcť ich smerové (alebo normálové) vektory. Nech  $\vec{s}_p$  respektíve  $\vec{s}_q$  sú smerové vektory priamok  $p$  respektíve  $q$ . Potom v súlade s predchádzajúcim príkladom, ak platí:

1.  $\vec{s}_p \neq \ell \vec{s}_q$  pre všetky nenulové reálne čísla  $\ell$ , tak priamky sú rôznobežné;
2.  $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$  pre nejaké nenulové reálne číslo  $\ell$  a aspoň jeden bod priamky  $p$  neleží na priamke  $q$ , tak priamky sú rovnobežné ale rôzne, t. j. priamky nemajú spoločný bod;
3.  $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$  pre nejaké nenulové reálne číslo  $\ell$  a aspoň jeden bod priamky  $p$  leží na priamke  $q$ , tak priamky sú totožné.

Rovnaké tvrdenia platia aj pre normálové vektory priamok.

Normálový vektor  $\vec{n}_p$  priamky  $p: 6x - 4y + 5 = 0$  je

$$\vec{n}_p = (6; -4).$$

Na základe (10.3) je

$$\vec{s}_p = (4; 6)$$

smerový vektor priamky  $p$ .

Za smerový vektor  $\vec{s}_q$  priamky  $q: x = -\frac{1}{2} + 2t, y = \frac{1}{2} + 3t, t \in \mathbb{R}$ , zvolíme podľa (10.1) vektor

$$\vec{s}_q = (2; 3).$$

Skúsme zistiť, či existuje také číslo  $\ell \neq 0$ , aby platilo  $\vec{s}_p = \ell \vec{s}_q$ , t. j.  $(4; 6) = \ell \cdot (2; 3)$ . Porovnaním prvých súradníc dostávame

$$4 = \ell \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 2.$$

Keďže aj pre druhé súradnice smerových vektorov pre  $\ell = 2$  platí

$$6 = 2 \cdot 3 = \ell \cdot 3,$$

zistili sme, že vektory  $\vec{s}_p$  a  $\vec{s}_q$  sú kolineárne, a preto nastáva prípad 2 alebo 3. Zvolíme ľubovoľný bod jednej z priamok  $p$  alebo  $q$ , napríklad pre priamku  $q$  zvolíme hodnotu parametra  $t = 0$  a dostávame bod

$$Q = \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

Súradnice bodu  $Q = [x_q; y_q]$  dosadíme do rovnice priamky  $p$ , čím overíme, či bod  $Q$  leží aj na priamke  $p$ :

$$6x_q - 4y_q + 5 = 6 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) - 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 = -3 - 2 + 5 = 0.$$

Teda bod  $Q$  leží súčasne na priamke  $p$  aj  $q$ , čiže nastal prípad 3. Priamky sú totožné, správna odpoveď je C.

**Poznámka.** Podobne ako pri riešení predchádzajúceho príkladu by sme sa po dosadení  $x$  a  $y$  z parametrických rovníc priamky  $q$  do rovnice priamky  $p$  presvedčili, že platí

$$6x_q - 4y_q + 5 = 6 \cdot \left( -\frac{1}{2} + 2t \right) - 4 \cdot \left( \frac{1}{2} + 3t \right) + 5 = -3 + 12t - 2 - 12t + 5 = 0,$$

a teda každý bod priamky  $q$  je súčasne bodom priamky  $p$ , čo znamená, že priamky  $p$  a  $q$  sú totožné.

## 10.2 Úlohy

- 
1. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi  $A = [-1; 2]$ ,  $B = [2; 5]$  sú: A  B   
A:  $x = -1 - 7t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     B:  $x = -1 + t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     C:  $x = -1 + t$ ,  
 $y = 2 + 7t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     D:  $x = -1 + 3t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  C  D
- 
2. Parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi  $B = [1; 6]$ ,  $C = [3; 5]$  sú: A  B   
A:  $x = 3 - t$ ,  $y = 5 + 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     B:  $x = 3 + t$ ,  $y = 5 + 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$     C:  $x = 3 + 2t$ ,  $y = 5 - t$ ,  
 $t \in \mathbb{R}$     D:  $x = 3 + 4t$ ,  $y = 5 + 11t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  C  D
- 
3. Priamka prechádzajúca bodmi  $U = [-2; -2]$ ,  $V = [3; -3]$  má smernicu rovnú: A  B   
A:  $-5$     B:  $-\frac{1}{5}$     C:  $\frac{1}{5}$     D:  $5$  C  D
- 
4. Priamka prechádzajúca bodmi  $M = [1; 3]$ ,  $N = [4; 3]$  má smernicu rovnú: A  B   
A:  $-\frac{6}{5}$     B:  $-\frac{5}{6}$     C:  $0$     D:  $\frac{5}{6}$  C  D
- 
5. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodmi  $A = [-1; 3]$ ,  $B = [4; 2]$  je: A  B   
A:  $x + 5y - 14 = 0$     B:  $5x - y + 8 = 0$     C:  $5x + y + 2 = 0$     D:  $5x + 3y - 4 = 0$  C  D
- 
6. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodmi  $A = [5; -2]$ ,  $B = [3; -1]$  je: A  B   
A:  $x + 2y - 1 = 0$     B:  $2x - y - 14 = 0$     C:  $2x + y - 8 = 0$     D:  $8x - 3y - 46 = 0$  C  D
- 
7. Rovnice  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -1 + 5t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sú rovnicami: A  B   
A: úsečky    B: polpriamky    C: priamky    D: roviny C  D
- 
8. Rovnice  $x = -t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $t \in \langle 2; \infty \rangle$  sú rovnicami: A  B   
A: úsečky    B: polpriamky    C: priamky    D: roviny C  D
- 
9. Rovnice  $x = 3 - 4t$ ,  $y = 1 + 3t$ ,  $t \in \langle -1; 4 \rangle$  sú rovnicami: A  B   
A: úsečky    B: polpriamky    C: priamky    D: roviny C  D
- 
10. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi  $x = 2 - 2t$ ,  $y = 3 + 4t$ ,  $t \in \langle -2; 4 \rangle$  sú: A  B   
A:  $[-6; 19]$     B:  $[0; 7]$     C:  $[2; 3]$     D:  $[6; -5]$  C  D
- 
11. Súradnice stredu úsečky danej vzťahmi  $x = 1 - 3t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $t \in \langle -3; 1 \rangle$  sú: A  B   
A:  $[-2; 4]$     B:  $[1; 2]$     C:  $[4; 0]$     D:  $[7; 6]$  C  D
- 
12. Jeden z normálových vektorov priamok rovnobežných s priamkou danou parametrickými  
rovniciami  $x = 1 - t$ ,  $y = 4t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  je: A  B   
A:  $(1; -4)$     B:  $(1; 4)$     C:  $(4; -1)$     D:  $(4; 1)$  C  D

- 
13. Jeden zo smerových vektorov priamok kolmych na priamku danu všeobecnou rovnicou  $3x + 5y - 7 = 0$  je: A  B   
C  D   
A:  $(-5; 3)$  B:  $(-3; 5)$  C:  $(3; 5)$  D:  $(5; 3)$
- 
14. Jeden zo smerových vektorov všetkých priamok rovnobežných s priamkou danou rovnicou  $2x - 3y + 1 = 0$  je: A  B   
C  D   
A:  $(-3; 2)$  B:  $(2; -3)$  C:  $(2; 3)$  D:  $(3; 2)$
- 
15. Priamka daná rovnicou  $x - y + 7 = 0$  zvierá s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti: A  B   
C  D   
A:  $-\frac{\pi}{4}$  B:  $\frac{\pi}{6}$  C:  $\frac{\pi}{4}$  D:  $\frac{\pi}{3}$
- 
16. Priamka daná rovnicou  $2x + 2y + 3 = 0$  zvierá s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti: A  B   
C  D   
A:  $-\frac{\pi}{6}$  B:  $\frac{\pi}{3}$  C:  $\frac{\pi}{2}$  D:  $\frac{3\pi}{4}$
- 
17. Priamka so všeobecnou rovnicou  $3x - \sqrt{3}y + 3 = 0$  zvierá s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti: A  B   
C  D   
A:  $\frac{\pi}{6}$  B:  $\frac{\pi}{4}$  C:  $\frac{\pi}{3}$  D:  $\frac{\pi}{2}$
- 
18. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom  $A = [0; 3]$  zvierajúcej s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti  $\frac{\pi}{4}$  je: A  B   
C  D   
A:  $x - y + 3 = 0$  B:  $x + y - 3 = 0$  C:  $\sqrt{2}x - 2y + 6 = 0$  D:  $\sqrt{2}x + 2y - 6 = 0$
- 
19. Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodom  $A = [1; 3]$  zvierajúcej s kladnou časťou osi  $x$  uhol veľkosti  $\frac{\pi}{3}$  je: A  B   
C  D   
A:  $x - 2y + 5 = 0$  B:  $x - \sqrt{3}y - 1 + 3\sqrt{3} = 0$  C:  $x + 2y - 7 = 0$  D:  $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} + 3 = 0$
- 
20. Priamky dané všeobecnou rovnicou  $x + 2y - 3 = 0$  a parametrickými rovnicami  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sú: A  B   
C  D   
A: rôznobežné B: rovnobežné C: totožné D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

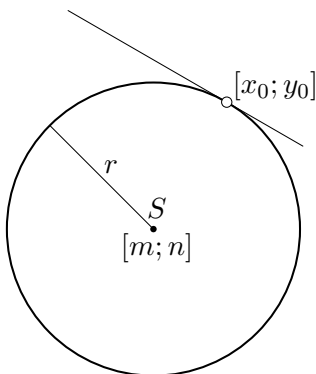
# 11 Kuželosečky

## 11.1 Riešené príklady

V úvode uvedieme rovnice kuželosečiek v stredovom, resp. vrcholovom tvare a rovnice dotyčníc k jednotlivým kuželosečkám v dotykovom bode kuželosečky  $[x_0; y_0]$ .

- Kružnica so stredom  $S = [m; n]$  a polomerom  $r$  má rovnicu

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \quad (11.1)$$

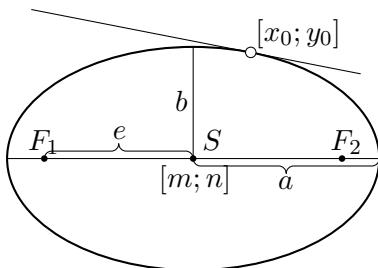


Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2. \quad (11.2)$$

- Elipsa so stredom  $S = [m; n]$  a polosami  $a, b$  má rovnicu

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \quad (11.3)$$



Vzdialenosť stredu elipsy od ohnísk  $|F_1S| = |F_2S| = e$ , kde  $e$  je excentricita elipsy, pre ktorú platí  $e = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ .

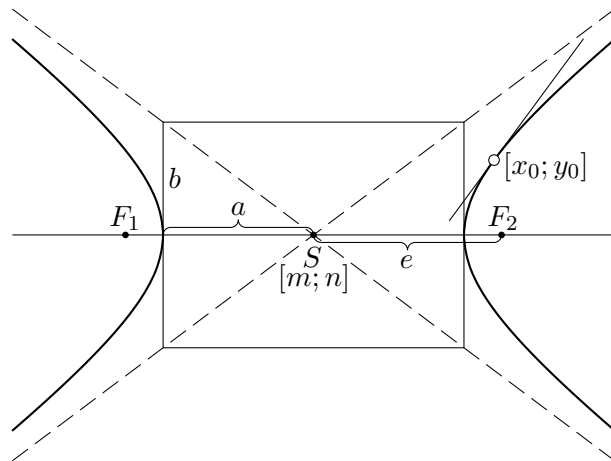
Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1. \quad (11.4)$$

- Hyperbola so stredom  $S = [m; n]$ , polosami  $a, b$  a osou<sup>3</sup> rovnobežnou s osou  $x$  má rovnicu

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \quad (11.5)$$

<sup>3</sup>Osoú hyperboly rozumieme priamku, na ktorej ležia jej ohniská.

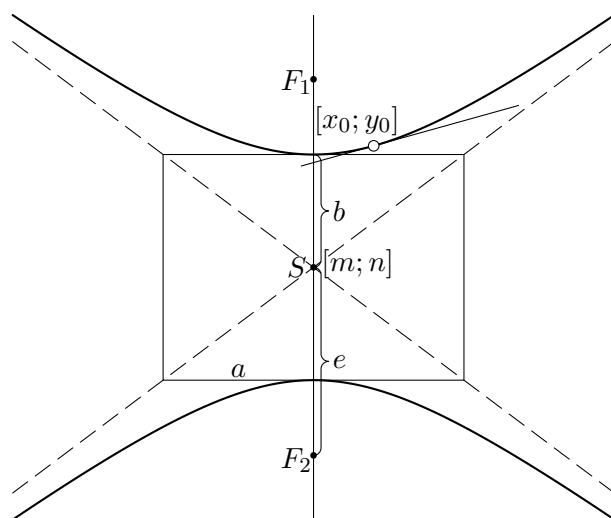


Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1. \quad (11.6)$$

Hyperbola so stredom  $S = [m; n]$ , polosami  $a, b$  a osou rovnobežnou s osou  $y$  má rovnicu

$$-\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \quad (11.7)$$



Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

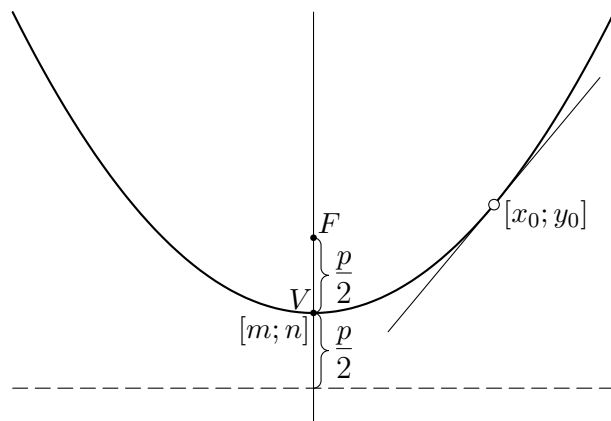
$$-\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1. \quad (11.8)$$

Vzdialenosť stredu hyperboly od ohnísk  $|F_1S| = |F_2S| = e$ , kde  $e$  je excentricita hyperboly, pre ktorú platí  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

- Parabola s vrcholom  $V = [m; n]$ , s osou rovnobežnou s osou  $y$  a parametrom  $p > 0$  má rovnicu<sup>4</sup>

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n). \quad (11.9)$$

<sup>4</sup>V rovnici (11.9) je potrebné uvažovať vždy práve jedno zo znamienok  $+$  alebo  $-$ . Rovnako treba chápať výraz  $\pm p$  aj v rovniciach dotyčnice k parabole.

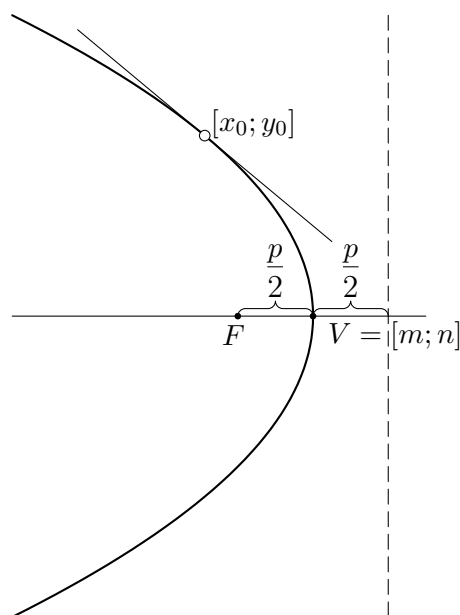


Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

$$(x_0 - m)(x - m) = \pm p(y + y_0 - 2n). \quad (11.10)$$

Parabola s vrcholom  $V = [m; n]$ , s osou rovnobežnou s osou  $x$  a parametrom  $p > 0$  má rovnicu

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m). \quad (11.11)$$



Rovnica dotyčnice v dotykovom bode  $[x_0; y_0]$  je

$$(y_0 - n)(y - n) = \pm p(x + x_0 - 2m). \quad (11.12)$$

Parameter  $p$  paraboly je vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky. Hodnota  $\frac{p}{2}$  udáva vzdialenosť vrchola od riadiacej priamky, resp. vzdialenosť vrchola od ohniska.

---

---

1. Rovnica  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením:

A  B

A: elipsy B: kružnice C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

C  D

---

**Riešenie.** Rovnicu  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$  upravíme na stredový tvar, ktorý obsahuje premenné  $x, y$  len vo výrazoch typu  $(x - m)$  a  $(y - n)$ . Dostaneme to doplnením na úplný štvorec podľa vzťahu

$$z^2 + p \cdot z = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2, \quad (11.13)$$

kde namiesto premennej  $z$  použijeme  $x$  alebo  $y$ .

Najskôr v danej rovnici združíme členy obsahujúce premenné  $x$  a  $y$ :

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 3 = 0$$

a na dvojčleny  $x^2 - 4x$  a  $y^2 + 6y$  aplikujeme vzťah (11.13). Dostaneme

$$\left[(x - 2)^2 - 4\right] + \left[(y + 3)^2 - 9\right] - 3 = 0$$

a po jednoduchých úpravách

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2.$$

Odtiaľ je zrejmé, že sa jedná o rovnicu kružnice (11.1) s  $m = 2$ ,  $n = -3$  a  $r = 4$ , t.j. kružnice so stredom  $S = [2; -3]$  a polomerom 4. Správna je odpoveď B.

---

---

2. Rovnica  $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením:

A  B

A: kružnice B: hyperboly C: elipsy D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

C  D

---

**Riešenie.** Rovnicu  $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$  upravíme na stredový tvar s výrazmi typu  $(x - m)$  a  $(y - n)$ . Využijeme úpravu (11.13) na úplný štvorec.

$$\begin{aligned} (16x^2 - 64x) + (25y^2 - 50y) - 311 &= 0, \\ 16(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 2y) - 311 &= 0, \\ 16\left[(x - 2)^2 - 4\right] + 25\left[(y - 1)^2 - 1\right] - 311 &= 0, \\ 16(x - 2)^2 - 64 + 25(y - 1)^2 - 25 - 311 &= 0, \\ 16(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 &= 400, \quad / : 400 \\ \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Porovnaním poslednej rovnice s rovnicou elipsy (11.3) vidno, že  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $a^2 = 25$  a  $b^2 = 16$ . Ide teda o elipsu so stredom  $S = [2; 1]$ , hlavnou polosou  $a = 5$  a vedľajšou polosou  $b = 4$ . Správna odpoveď je C.

---

---

3. Rovnica  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y + 61 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením:

A  B

A: elipsy B: kružnice C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

C  D

---

**Riešenie.** Rovnicu podobne ako v príkladoch 1 a 2 upravíme na stredový tvar s výrazmi typu  $(x - m)$  a  $(y - n)$ . Využijeme opäť úpravu (11.13) na úplný štvorec.

$$\begin{aligned}(9x^2 + 18x) + (4y^2 - 16y) + 61 &= 0, \\ 9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) + 61 &= 0, \\ 9[(x + 1)^2 - 1] + 4[(y - 2)^2 - 4] + 61 &= 0, \\ 9(x + 1)^2 - 9 + 4(y - 2)^2 - 16 + 61 &= 0, \\ 9(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 &= -36, \quad / : 36 \\ \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} &= -1.\end{aligned}$$

Tejto rovnici nevyhovuje žiadny bod, lebo na jej ľavej strane vystupuje súčet dvoch nezáporných výrazov, ktorý nemôže byť rovný  $-1$ . Rovnica  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y + 61 = 0$  nie je rovnicou žiadnej z uvedených kuželosečiek. Správna odpoveď je D.

---

---

4. Rovnica kružnice so stredom v bode  $S = [-5; 4]$  a polomerom  $r = 7$  je:

A  B

A:  $x^2 + 5x + y^2 - 4y = 49$  B:  $x^2 + y^2 - 10x - 8y - 8 = 0$  C:  $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 8 = 0$   
D:  $2x^2 + 2y^2 + 20x - 16y - 11 = 0$

C  D

---

**Riešenie.** Rovnica kružnice so stredom  $S = [m; n]$  a polomerom  $r$  má tvar

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Dosadíme do tejto rovnice súradnice stredu  $m = -5, n = 4$  a polomer  $r = 7$ . Dostaneme

$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 49.$$

Umocnením výrazov v zátvorkách na ľavej strane rovnice máme

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 49$$

a po úprave

$$x^2 + y^2 + 10x - 8y - 8 = 0.$$

Správna odpoveď je C.

---

---

5. Rovnica dotyčnice ku kružnici  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$  v bode  $[3; 12]$  je:

A  B

A:  $3x - 4y + 37 = 0$  B:  $3x + 4y - 57 = 0$  C:  $3x - y + 3 = 0$  D:  $x - 4y + 45 = 0$

C  D

---

**Riešenie.** Overíme, či bod  $[3; 12]$  leží na kružnici. Dosadíme jeho súradnice do rovnice kružnice:

$$\begin{aligned}(3 + 3)^2 + (12 - 4)^2 &= 100, \\ 6^2 + 8^2 &= 100, \\ 36 + 64 &= 100, \\ 100 &= 100.\end{aligned}$$

Keďže súradnice bodu  $[3; 12]$  vyhovujú rovnici kružnice, tento bod je jej dotykovým bodom.  
Hľadáme dotyčnicu ku kružnici

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100,$$

pre ktorú je  $m = -3$ ,  $n = 4$  a  $r^2 = 100$ . Rovnica dotyčnice bude podľa (11.2)

$$(x_0 + 3)(x + 3) + (y_0 - 4)(y - 4) = 100.$$

Do tejto rovnice dosadíme súradnice dotykového bodu  $[3; 12]$ , t. j.  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 12$  :

$$(3 + 3)(x + 3) + (12 - 4)(y - 4) = 100.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$6(x + 3) + 8(y - 4) = 100, \quad / : 2$$

$$3(x + 3) + 4(y - 4) = 50,$$

$$3x + 9 + 4y - 16 = 50,$$

$$3x + 4y - 57 = 0.$$

Teda správna je odpoveď B.

---

---

6. Rovnica dotyčnice k elipse  $9x^2 + 4y^2 = 25$  v bode  $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$  je:

A  B

A:  $12x + 6y - 25 = 0$  B:  $3x + 2y - 25 = 0$  C:  $3x - 2y - 1 = 0$  D:  $6x + 2y - 11 = 0$

C  D

**Riešenie.** Overíme, či bod  $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$  leží na elipse. Dosadíme jeho súradnice do rovnice elipsy:

$$9 \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 25,$$

$$9 \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{9}{4} = 25,$$

$$16 + 9 = 25,$$

$$25 = 25.$$

Keďže súradnice bodu  $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$  vyhovujú rovnici elipsy, tento bod je jej dotykovým bodom.

Vydelením danej rovnice číslom 25 a po jednoduchej úprave získame základné analytické vyjadrenie (11.3) elipsy:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

Pre súradnice jej stredu platí  $m = 0$ ,  $n = 0$ , pričom  $a^2 = \frac{25}{9}$ ,  $b^2 = \frac{25}{4}$ .

Tieto hodnoty spolu so súradnicami dotykového bodu  $x_0 = \frac{4}{3}$ ,  $y_0 = \frac{3}{2}$  dosadíme do rovnice dotyčnice (11.4). Dostaneme

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot x}{\frac{25}{9}} + \frac{\frac{3}{2} \cdot y}{\frac{25}{4}} = 1.$$

Po úprave oboch zložených zlomkov dostaneme

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{4}{3} \cdot x + \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{2} \cdot y = 1.$$

Po vykrátení zlomkov a vynásobením rovnice číslom 25 získame rovnicu

$$12x + 6y = 25,$$

ktorá je ekvivalentná s rovnicou

$$12x + 6y - 25 = 0.$$

Teda správna odpoveď je A.

---

---

7. Rovnica dotyčnice k parabole  $(y - 2)^2 = 12(x + 1)$  v bode  $[2; -4]$  je:

A:  $x + y + 2 = 0$    B:  $2x - 4y = 0$    C:  $2x - 4y + 1 = 0$    D:  $x + y - 12 = 0$

A    B

C    D

**Riešenie.** Dosadením súradníc bodu  $[2; -4]$  do rovnice paraboly, ľahko overíme (analogicky ako v príkladoch 5 a 6), že bod s danými súradnicami leží na parabole, a teda je jej dotykovým bodom.

Daná parabola má rovnicu tvaru (11.11) so znamienkom  $+$  s  $m = -1$ ,  $n = 2$  a  $p = 6$ .

Napišeme rovnicu dotyčnice (11.12) k parabole:

$$(y_0 - 2)(y - 2) = 6(x_0 + x + 2).$$

Ak za  $x_0, y_0$  dosadíme súradnice dotykového bodu  $x_0 = 2, y_0 = -4$  dostaneme

$$(-4 - 2)(y - 2) = 6(2 + x + 2).$$

Po úpravách máme

$$\begin{aligned} -6(y - 2) &= 24 + 6x, & / : 6 \\ -(y - 2) &= 4 + x, & / + (y - 2) \\ 0 &= x + y + 2. \end{aligned}$$

Správna odpoveď je A.

---

---

8. Sú dané body  $A = [5; -3]$  a  $B = [-3; 7]$ . Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka  $AB$  je:

A:  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$    B:  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 164$    C:  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 100$   
D:  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 41$

A    B

C    D

**Riešenie.** Na určenie rovnice kružnice v stredovom tvare potrebujeme poznať súradnice stredu  $S = [m; n]$  a polomer  $r$  kružnice.

Ak  $A = [a_1; a_2]$ ,  $B = [b_1; b_2]$ , tak stred úsečky  $AB$  vypočítame podľa vzťahu

$$S = \left[ \frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2} \right] \quad (11.14)$$

a pre dĺžku úsečky  $AB$  (vzdialenosť bodov  $A, B$ ) platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \quad (11.15)$$

Ak  $A = [5; -3]$ ,  $B = [-3; 7]$ , tak stred úsečky  $AB$  (čo je súčasne aj stred kružnice) je

$$S = \left[ \frac{5 + (-3)}{2}; \frac{-3 + 7}{2} \right] = \left[ \frac{2}{2}; \frac{4}{2} \right] = [1; 2].$$

Teda  $m = 1$ ,  $n = 2$ . Polomer kružnice môžeme vypočítat ako vzdialenosť bodov  $A, S$  alebo  $B, S$ . Využijeme vzťah (11.15) pre vzdialenosť dvoch bodov. Platí

$$r = |AS| = \sqrt{(m - a_1)^2 + (n - a_2)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

Hľadanú rovnicu kružnice dostaneme, ak do stredového tvaru (11.1) rovnice kružnice dosadíme súradnice jej stredu  $m = 1$ ,  $n = 2$  a polomer kružnice  $r = \sqrt{41}$ . Teda

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 41.$$

Z uvedeného vyplýva, že správna odpoveď je D.

9. Rovnica hyperboly s hlavnou polosou  $a = 5$  a ohniskami  $F_1 = [-6; 5]$ ,  $F_2 = [8; 5]$  je: A  B

A:  $\frac{(x-1)^2}{196} - \frac{(y-5)^2}{25} = 1$     B:  $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{24} = 1$     C:  $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-5)^2}{24} = 1$     D:  $\frac{(x-5)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  C  D

**Riešenie.** Keďže  $y$ -ové súradnice ohnísk sú rovnaké, os hyperboly je rovnobežná s osou  $x$ . Potom rovnica hyperboly so stredom  $S = [m; n]$ , hlavnou polosou  $a$  a vedľajšou polosou  $b$  je typu (11.5):

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Stred hyperboly je stredom úsečky  $F_1F_2$ . Jeho súradnice vypočítame analogicky ako v príklade 8 podľa vzťahu (11.14). Preto

$$S = \left[ \frac{-6 + 8}{2}; \frac{5 + 5}{2} \right] = \left[ \frac{2}{2}; \frac{10}{2} \right] = [1; 5].$$

Na určenie veľkosti vedľajšej polosi  $b$  použijeme vzťah pre excentricitu  $e$  (ohniskovú vzdialenosť) hyperboly. Platí

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad \text{a} \quad |F_1F_2| = 2e,$$

kde  $|F_1F_2|$  je vzdialenosť ohnísk. Podľa vzťahu (11.15) z príkladu 8 pre vzdialenosť bodov  $F_1, F_2$  dostaneme

$$|F_1F_2| = \sqrt{(8 + 6)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{14^2 + 0^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Potom

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2} = 7$$

a

$$b^2 = e^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24.$$

Požadovaná rovnica hyperboly je

$$\frac{(x - 1)^2}{25} - \frac{(y - 5)^2}{24} = 1.$$

Správna odpoveď je C.

---

---

10. Priamka  $2x + 3y - 8 = 0$  a hyperbola  $4x^2 - y^2 = 64$  majú:

A  B

A: spoločný jeden bod  $[4; 0]$  B: spoločný jeden bod  $[1; 2]$  C: spoločné dva body D: nemajú spoločný žiadny bod

C  D

---

**Riešenie.** Ak hyperbola a priamka majú spoločný bod, súradnice tohto bodu musia vyhovovať rovnici hyperboly aj rovnici priamky. Preto vzájomnú polohu priamky a hyperboly určíme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned}4x^2 - y^2 &= 64, \\2x + 3y - 8 &= 0.\end{aligned}$$

Z druhej rovnice vyjadríme jednu premennú, napr.  $x$ :

$$x = \frac{8}{2} - \frac{3}{2}y = 4 - \frac{3}{2}y$$

a dosadíme do prvej rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned}4\left(4 - \frac{3}{2}y\right)^2 - y^2 &= 64, \\4\left(16 - 12y + \frac{9}{4}y^2\right) - y^2 &= 64, \\64 - 48y + 9y^2 - y^2 &= 64, \\8y^2 - 48y &= 0, \quad / : 8 \\y^2 - 6y &= 0.\end{aligned}$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu bez absolútneho člena. Vyriešime ju rozkladom na súčinový tvar:

$$y \cdot (y - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y - 6 = 0.$$

Rovnica má dve riešenia

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 6,$$

preto priamka  $2x + 3y - 8 = 0$  má s hyperbolou  $4x^2 - y^2 = 64$  spoločné dva body. Správna odpoveď je C.

Poznamenajme, že dosadením  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 6$  do vzťahu  $x = 4 - \frac{3}{2}y$  vypočítame  $x$ -ové súradnice priesečníkov  $P_1$  a  $P_2$  priamky a hyperboly:

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 0 = 4, \quad y_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 6 = -5.$$

Priesečníky sú  $P_1 = [4; 0]$  a  $P_2 = [-5; 6]$ .

## 11.2 Úlohy

- 
1. Rovnica  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením: A  B   
A: kružnice B: elipsy C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
2. Rovnica  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 24 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením: A  B   
A: kružnice B: elipsy C: hyperboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
3. Rovnica  $3x^2 - 4y^2 + 12x + 40y - 88 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením: A  B   
A: elipsy B: hyperboly C: paraboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
4. Rovnica  $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y + 1 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením: A  B   
A: kružnice B: elipsy C: paraboly D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
5. Rovnica  $x^2 - 4x - y + 3 = 0$  je v rovine analytickým vyjadrením: A  B   
A: kružnice so stredom  $S = [2; 0]$  B: elipsy so stredom  $S = [-1; 2]$  C: paraboly s vrcholom  $V = [-2; 1]$  D: paraboly s vrcholom  $V = [2; -1]$  C  D
- 
6. Rovnica kružnice so stredom v bode  $S = [1; 2]$  a polomerom  $r = 3$  je: A  B   
A:  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$  B:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  C:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  D:  $2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$  C  D
- 
7. Rovnica kružnice so stredom v bode  $S = [-2; -3]$  a polomerom  $r = 5$  je: A  B   
A:  $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$  B:  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$  C:  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  D:  $2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y - 25 = 0$  C  D
- 
8. Rovnica elipsy so stredom v bode  $S = [2; -2]$  a polosami  $a = 3$ ,  $b = 2$  je: A  B   
A:  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y - 1 = 0$  B:  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$  C:  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 80 = 0$  D:  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 100 = 0$  C  D
- 
9. Rovnica hyperboly s hlavnou polosou  $a = 12$  a ohniskami  $F_1 = [-10; 2]$ ,  $F_2 = [16; 2]$  je: A  B   
A:  $-\frac{(x-3)^2}{144} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$  B:  $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{81} = 1$  C:  $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$  D:  $\frac{(x-2)^2}{144} - \frac{(y-3)^2}{81} = 1$  C  D
- 
10. Rovnica paraboly s ohniskom  $F = [4; 0]$  a riadiacou priamkou  $y = 2$  je: A  B   
A:  $(x-4)^2 = -4y$  B:  $(x-4)^2 = -4(y-1)$  C:  $(y-4)^2 = -4(x-1)$  D:  $(x-4)^2 = -2(y-1)$  C  D
- 
11. Rovnica dotyčnice ku kružnici  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$  v bode  $[6; 2]$  je: A  B   
A:  $2x + 6y - 24 = 0$  B:  $4x + 3y - 25 = 0$  C:  $4x + 3y - 30 = 0$  D:  $6x + 2y - 40 = 0$  C  D

- 
12. Rovnica dotyčnice ku kružnici  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  v bode  $[1; -1]$  je: A  B   
 A:  $y = -1$  B:  $y = x - 2$  C:  $y = 3x - 4$  D:  $y = -x$  C  D
- 
13. Rovnica dotyčnice k parabole  $x^2 + 20y = 0$  v bode  $[10; -5]$  je: A  B   
 A:  $x - y - 15 = 0$  B:  $x + y - 5 = 0$  C:  $2x + y - 15 = 0$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
14. Rovnica dotyčnice k parabole  $(x + 3)^2 = -8(y - 4)$  v bode  $[1; 2]$  je: A  B   
 A:  $x + y - 3 = 0$  B:  $x + 2y - 5 = 0$  C:  $2x + y - 4 = 0$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
15. Rovnica dotyčnice k hyperbole  $x^2 - 2y^2 = 8$  v bode  $[4; 2]$  je: A  B   
 A:  $x - 2y = 0$  B:  $x - y - 2 = 0$  C:  $x + 2y - 8 = 0$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
16. Rovnica dotyčnice k elipse  $x^2 + 16y^2 = 25$  v bode  $[3; 1]$  je: A  B   
 A:  $x + 4y - 7 = 0$  B:  $x + 16y - 25 = 0$  C:  $3x + y - 10 = 0$  D:  $3x + 16y - 25 = 0$  C  D
- 
17. Priamka  $6x - y - 7 = 0$  a parabola  $(x + 1)^2 = y + 4$ : A  B   
 A: majú spoločné dva body  $[2; 5]$ ,  $[5; 23]$  B: majú spoločný jeden bod C: nemajú spoločný žiadny bod D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
18. Priamka  $2x + y - 14 = 0$  a elipsa  $4x^2 + y^2 - 100 = 0$ : A  B   
 A: majú spoločný jeden bod  $[3; 8]$  B: nemajú spoločný žiadny bod C: majú spoločné dva body D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 
19. Sú dané body  $A = [3; -7]$ ,  $B = [9; 1]$ . Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka  $AB$  je: A  B   
 A:  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 121$  B:  $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$  C:  $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 100$  C  D   
 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne
- 
20. Sú dané body  $A = [7; 8]$ ,  $B = [1; 16]$ . Rovnica kružnice, ktorej priemerom je úsečka  $AB$  je: A  B   
 A:  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 32$  B:  $(x - 4)^2 + (y - 12)^2 = 25$  C:  $(x - 4)^2 + (y - 12)^2 = 100$  C  D   
 D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

## 12 Riešenie jednoduchých goniometrických rovníc

### 12.1 Riešené príklady

Na úvod uvedieme tabuľku základných hodnôt goniometrických funkcií:

| $x$                     | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|-------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|                         | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$                | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos x$                | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tg} x$   | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | *               |
| $\operatorname{cotg} x$ | *         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

Taktiež uvedieme niekoľko základných vzťahov medzi goniometrickými funkciami, ktoré sa využívajú pri riešení úloh v tejto kapitole.

Pre všetky reálne čísla  $x$  platia nasledujúce vzťahy:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (12.1)$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad (12.2)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \quad (12.3)$$

Pre všetky reálne čísla  $x$ ,  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , platí

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \quad (12.4)$$

Pre všetky reálne čísla  $x$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , platí

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (12.5)$$

---

1. Počet koreňov rovnice  $\cos x = -1$  na intervale  $(-\pi; 2\pi)$  je:

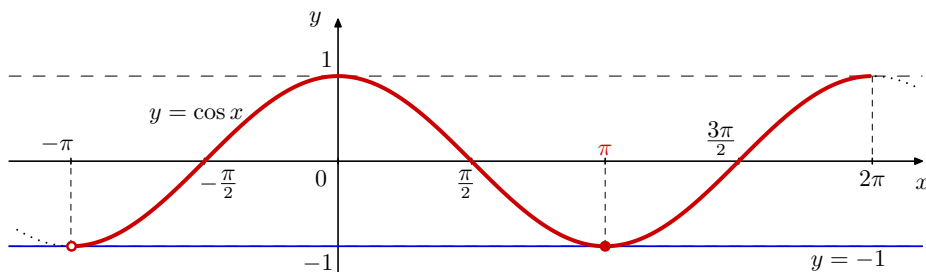
A  B

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

C  D

---

**Riešenie.** Načrtnime graf funkcie  $y = \cos x$  na intervale  $(-\pi; 2\pi)$ .



Z obrázku je vidieť, že čísla, ktoré by mohli byť riešením rovnice  $\cos x = -1$  na intervale  $(-\pi; 2\pi)$ , sú  $-\pi$  a  $\pi$ . Keďže

$$-\pi \notin (-\pi; 2\pi),$$

dostávame, že riešením je jedine

$$x = \pi.$$

Správna odpoveď je A.

---

---

2. Počet koreňov rovnice  $\sin x = -2$  na intervale  $\langle 0; \pi \rangle$  je:

A: 0   B: 1   C: 2   D: 3

A  B

C  D

---

**Riešenie.** Obor hodnôt funkcie  $f : y = \sin x$  je

$$H_f = \langle -1; 1 \rangle.$$

Keďže

$$-2 \notin \langle -1; 1 \rangle,$$

nemôže funkcia  $y = \sin x$  hodnotu  $-2$  nadobúdať. Teda rovnica  $\sin x = -2$  nemá riešenie na množine reálnych čísel, a preto nemá riešenie ani na intervale  $\langle 0; \pi \rangle$ . Správna odpoveď je A.

---

---

3. Počet koreňov rovnice  $\operatorname{tg} x = 1$  na intervale  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$  je:

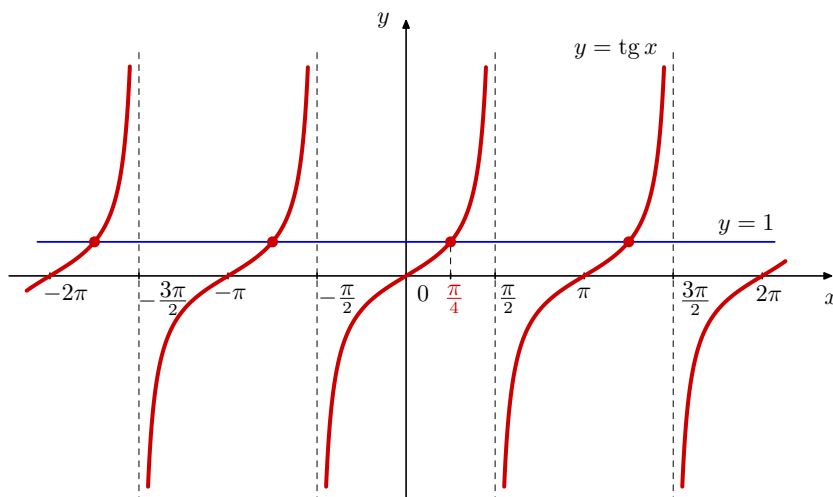
A: 1   B: 2   C: 3   D: 4

A  B

C  D

---

**Riešenie.** Načrtnime graf funkcie  $y = \operatorname{tg} x$ .



Z obrázku vidno, že rovnica  $\operatorname{tg} x = 1$  má na intervale  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$  štyri korene. Teda správna odpoveď je D.

Ak by niekto uprednostnil radšej exaktné riešenie, ponúkame aj to. Uvažujme najprv korene danej rovnice na intervale  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Rovnica  $\operatorname{tg} x = 1$  má na tomto intervale jediný koreň  $x = \frac{\pi}{4}$ . Keďže funkcia tangens je periodická so základnou periódou  $\pi$ , riešenia danej rovnice na množine reálnych čísel sú všetky čísla tvaru

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uvážme, pre aké hodnoty  $k$  dané čísla patria do intervalu  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

Vyriešime nasledujúcu nerovnicu:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi.$$

Po odpočítaní  $\frac{\pi}{4}$  a vykrátení kladného čísla  $\pi$  dostávame:

$$-\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}.$$

Tejto nerovnici vyhovujú celočíselné  $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$ .

Teda riešenia rovnice na intervale  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$  sú

$$-\frac{7\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}.$$

Správna odpoveď je D.

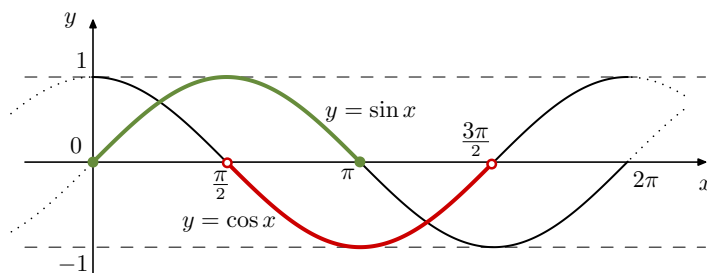
4. Podmienky  $\sin x \geq 0$  a  $\cos x < 0$  pre  $0 \leq x \leq 2\pi$  sú ekvivalentné s podmienkou:

A:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$     B:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$     C:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$     D:  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

A  B

C  D

**Riešenie.** Načrtnime grafy funkcií  $y = \sin x$  a  $y = \cos x$  na  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .



Z obrázku vidno, že obidve podmienky sú splnené pre  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Správna odpoveď je C.

5. Pre  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $\frac{1}{\cos 2x}$  rovný výrazu:

A: 1    B:  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$     C:  $\frac{1}{2 \cos x}$     D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A  B

C  D

**Riešenie.**

- Odpoveď A nie je správna, pretože  $x$  nie je konštanta.
- Odpoveď C nie je správna, pretože vo všeobecnosti  $\cos 2x \neq 2 \cos x$ .
- Zistíme, či B je správna odpoveď. Pre  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , použitím známych vzťahov (12.4), (12.1) a (12.3) medzi goniometrickými funkciami dostávame

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \stackrel{(12.4)}{=} \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1}{1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \stackrel{(12.1),(12.3)}{=} \frac{1}{\cos 2x}.$$

Teda B je správna odpoveď.

6. Pre  $x \neq k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  je výraz  $\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$  rovný výrazu:

A:  $\frac{1}{\cos x}$     B:  $\operatorname{tg} x$     C:  $\operatorname{cotg}^2 x$     D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

A  B

C  D

**Riešenie.** Pre všetky reálne čísla  $x$  platí vzťah (12.1)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Pre  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , využijúc tiež vzťah (12.5) po úprave dostávame

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \stackrel{(12.1)}{=} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \stackrel{(12.5)}{=} \cot^2 x.$$

Správna odpoveď je C.

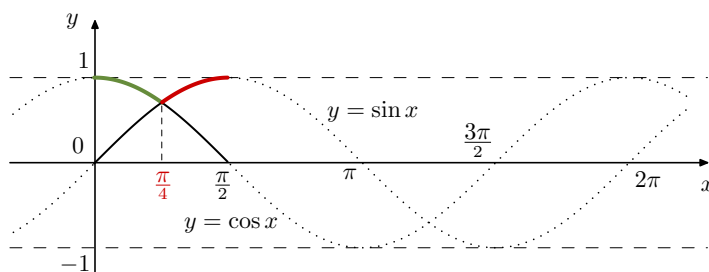
7. Podmienka  $\sin x \geq \cos x$  pre  $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$  je ekvivalentná s podmienkou:

A:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$     B:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$     C:  $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$     D:  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

A  B

C  D

**Riešenie.** Načrtnime grafy funkcií  $y = \sin x$  a  $y = \cos x$  na  $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ .



Z obrázku je zrejmé, že podmienka  $\sin x \geq \cos x$  pre  $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$  je ekvivalentná s podmienkou  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Priesečník grafov funkcií  $y = \sin x$  a  $y = \cos x$  je v bode  $x = \frac{\pi}{4}$ , pretože

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Správna odpoveď je D.

Poznamenajme, že odpoveď C nie je správna, pretože nezahŕňa riešenie  $x = \frac{\pi}{2}$ .

8. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii  $y = \sin x$  je pravdivé:

A: definičným oborom funkcie je množina všetkých reálnych čísel    B: je párna    C: funkcia je zhora neohraničená    D: funkcia je rastúca na intervale  $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

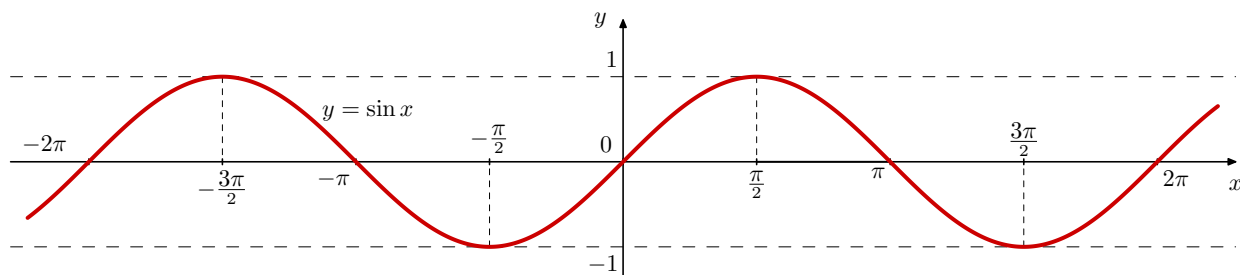
A  B

C  D

**Riešenie.**

Funkcia sínus je daná predpisom  $f : y = \sin x$ . Základné vlastnosti funkcie sínus sú:

- (1) definičný obor je  $D_f = \mathbb{R}$ ,
- (2) obor hodnôt je  $H_f = \langle -1, 1 \rangle$ ,
- (3) keďže obor hodnôt je ohraničený, funkcia sínus je ohraničená,
- (4) je periodická so základnou periódou  $2\pi$ ,



(5) je rastúca na  $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$  a klesajúca na  $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$ ,

(6) nie je prostá,

(7) je nepárna, t. j. pre všetky reálne čísla  $x$  platí:  $\sin(-x) = -\sin x$ ,

(8) grafom je sínusoida.

Teda

- z (1) vyplýva, že tvrdenie A je pravdivé;
- z vlastnosti (7) dostávame, že B nie je pravdivé;
- z (3) dostávame, že odpoveď C nie je správna;
- z vlastnosti (5), ale najmä z grafu je zrejmé, že funkcia  $y = \sin x$  je na intervale  $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$  klesajúca, teda D nie je pravdivé tvrdenie.

Správna odpoveď je A.

## 12.2 Úlohy

- 
1. Počet koreňov rovnice  $\cos x = 0$  na intervale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
2. Počet koreňov rovnice  $\sin x = 1$  na intervale  $(0; 4\pi)$  je: A  B   
A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 C  D
- 
3. Počet koreňov rovnice  $\cos x = 0,4$  na intervale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
4. Počet koreňov rovnice  $\cos x = 1$  na intervale  $(0; 2\pi)$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
5. Počet koreňov rovnice  $\cos x = -1$  na intervale  $\langle -\pi; \pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
6. Počet koreňov rovnice  $\cos x = 2$  na intervale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
7. Počet koreňov rovnice  $\cotg x = 1$  na intervale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
8. Počet koreňov rovnice  $\cotg x = 0$  na intervale  $\langle -\pi; \pi \rangle$  je: A  B   
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 C  D
- 
9. Podmienky  $\sin x > 0$  a  $\cos x > 0$  pre  $0 \leq x \leq 2\pi$  sú ekvivalentné s podmienkou: A  B   
A:  $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  B:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  C:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  D:  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  C  D
- 
10. Podmienky  $\sin x \leq 0$  a  $\cos x > 0$  pre  $0 \leq x \leq 2\pi$  sú ekvivalentné s podmienkou: A  B   
A:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  B:  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  C:  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  D:  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  C  D
- 
11. Podmienky  $\sin x \leq 0$  a  $\cos x \leq 0$  pre  $0 \leq x \leq 2\pi$  sú ekvivalentné s podmienkou: A  B   
A:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  B:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  C:  $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$  D:  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  C  D
- 
12. Pre  $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$  rovný výrazu: A  B   
A: 1 B:  $\frac{2}{\sin 2x}$  C:  $2\operatorname{tg} x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
-

13. Pre  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$  rovný výrazu: A  B   
A: 1 B:  $\operatorname{cotg}^2 x$  C:  $\sin^2 x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

14. Pre  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$  rovný výrazu: A  B   
A:  $\frac{1}{\sin^2 x}$  B:  $\operatorname{tg}^2 x$  C:  $\operatorname{cotg}^2 x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

15. Pre  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$  rovný výrazu: A  B   
A: 1 B:  $\operatorname{tg}^2 x$  C:  $\cos^2 x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

16. Výraz  $(\cos^2 x - \cos 2x)$  je rovný výrazu: A  B   
A:  $\cos x$  B:  $\sin x$  C:  $\sin^2 x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

17. Podmienka  $\sin x > \cos x$  pre  $x \in (0; \pi)$  je ekvivalentná s podmienkou: A  B   
A:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  B:  $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$  C:  $\frac{\pi}{4} < x < \pi$  D:  $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$  C  D

---

18. Podmienka  $\sin x \leq \cos x$  pre  $x \in (0; \pi)$  je ekvivalentná s podmienkou: A  B   
A:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  B:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  C:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  D:  $\frac{\pi}{4} < x < \pi$  C  D

---

19. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii  $y = \cos x$  nie je pravdivé: A  B   
A: je ohraničená B: je periodická C: je nepárna D: je rastúca na intervale  $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$  C  D

---

20. Rozhodnite, ktoré z uvedených tvrdení o funkcii  $y = \operatorname{tg} x$  je pravdivé: A  B   
A: je ohraničená zdola B: nie je periodická C: je párna D: je rastúca na intervale  $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$  C  D

## 13 Aritmetické a geometrické postupnosti

### 13.1 Riešené príklady

- 
- 
1. Pre členy aritmetickej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  platia rovnice  $a_4 + a_5 = 7$  a  $2a_4 - a_2 = 8$ . Prvý člen  $a_1$  tejto postupnosti je: A  B   
A: 8   B: 7   C: 3   D: -7 C  D
- 

**Riešenie.** Základné charakteristiky aritmetickej postupnosti sú jej prvý člen  $a_1$  a diferencia  $d$ . Je známe, že pre  $n$ -tý člen  $a_n$  aritmetickej postupnosti platí vzťah

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pomocou neho môžeme vyjadriť členy postupnosti, ktoré vystupujú v daných rovniciach:

$$a_4 = a_1 + 3d, \quad a_5 = a_1 + 4d \quad \text{a} \quad a_2 = a_1 + d.$$

Takto rovnice z textu úlohy nadobudnú tvar

$$\begin{aligned}(a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) &= 7, \\ 2(a_1 + 3d) - (a_1 + d) &= 8\end{aligned}$$

a po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned}2a_1 + 7d &= 7, \\ a_1 + 5d &= 8.\end{aligned}$$

Túto sústavu rovníc vyriešime napríklad dosadzovacou metódou: z druhej rovnice je

$$a_1 = 8 - 5d.$$

Po dosadení do prvej rovnice dostaneme

$$2(8 - 5d) + 7d = 7,$$

a teda  $-3d = -9$  a odtiaľ  $d = 3$ . Potom  $a_1 = 8 - 5 \cdot 3 = -7$ . Správna odpoveď je D.

- 
- 
2. Korene rovnice  $x^2 - x - 6 = 0$  tvoria prvé dva členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Jedenásty člen tejto postupnosti je: A  B   
A: 43   B: 48   C: 38   D: 11 C  D
- 

**Riešenie.** Najprv vypočítame korene danej kvadratickej rovnice  $x^2 - x - 6 = 0$ . Dostaneme ich zo vzťahu (8.1) na strane 56, kde  $a = 1$ ,  $b = -1$  a  $c = -6$ . Potom  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$  a

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}.$$

Teda  $x_1 = 3$  a  $x_2 = -2$ . Čísla 3 a -2 majú tvoriť prvé dva členy rastúcej postupnosti, čo znamená, že  $a_1 = -2$  a  $a_2 = 3$ . Potom diferencia postupnosti je

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-2) = 5.$$

Pre  $n$ -tý člen  $a_n$  aritmetickej postupnosti platí vzťah

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (13.1)$$

kde  $a_1$  je jej prvý člen a  $d$  je jej diferenciacia. Odtiaľ pre  $n = 11$  je  $a_{11} = -2 + (11 - 1) \cdot 5 = 48$ . Správna je odpoveď B.

- 
- 
3. Nech  $a$  je ľubovoľné reálne číslo a  $\frac{a+n}{2}$  je  $n$ -tý člen aritmetickej postupnosti. Potom jej diferenciacia je: A  B   
C  D
- A: 1   B:  $\frac{1}{2}$    C: 2   D: 3
- 

**Riešenie.** Z textu príkladu vidno, že  $n$ -tý člen  $a_n$  skúmanej postupnosti je daný predpisom

$$a_n = \frac{a+n}{2}.$$

Pri aritmetickej postupnosti platí, že ak k jej ľubovoľnému členu pripočítame jej diferenciaciu  $d$ , tak dostaneme bezprostredne nasledujúci člen postupnosti, t. j.

$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Odtiaľ je

$$d = a_{n+1} - a_n,$$

čo v našom prípade dáva

$$d = \frac{a+(n+1)}{2} - \frac{a+n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Správna je odpoveď B.

- 
- 
4. Súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné tromi a sú menšie ako 1 000 je: A  B   
A: 166 833   B: 16 833   C: 333 666   D: 168 633 C  D
- 

**Riešenie.** Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné tromi a sú menšie ako 1 000 tvoria množinu

$$\{3, 6, 9, \dots, 996, 999\}.$$

Je to aritmetická postupnosť s diferenciou  $d = 3$ , ktorej prvý člen je  $a_1 = 3$  a posledný člen je 999. Ľahko vidieť, že počet členov tejto postupnosti je

$$n = \frac{999}{3} = 333.$$

Tu sme mohli použiť aj vzťah (13.1), podľa ktorého je

$$999 = 3 + (n - 1) \cdot 3,$$

a teda  $n = 333$ .

Pre súčet  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  prvých  $n$  členov aritmetickej postupnosti platí

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Stačí si uvedomiť, že v našom prípade je  $a_n = a_{333} = 999$ . Takto

$$s_{333} = \frac{333}{2} (3 + 999) = 166\,833,$$

a preto správna odpoveď je A.

---

---

5. Súčet prvých  $n$  členov aritmetickej postupnosti je  $s_n = 5n^2 - 3n$ . Ôsmy člen tejto postupnosti je:

A  B   
C  D

A: 10 B: 86 C: 296 D: 72

---

**Riešenie.** Pre  $n = 1$  máme  $s_1 = 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2$ , ale aj  $s_1 = a_1$ . To znamená, že  $a_1 = 2$ . Pre  $n = 2$  je  $s_2 = 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 14$  a taktiež  $s_2 = a_1 + a_2$ . Teda  $14 = a_1 + a_2$  a keďže  $a_1 = 2$ , tak  $a_2 = 12$ .

Pre diferenciu tejto postupnosti dostávame

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 2 = 10.$$

Keďže pre  $n$ -tý člen aritmetickej postupnosti platí  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ , tak pre požadovaný ôsmy člen postupnosti je  $n = 8$  a

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7 \cdot 10 = 72.$$

Správna odpoveď je D.

---

---

6. Druhý člen geometrickej postupnosti je  $a$ , ( $a \neq 0$ ) a jej piaty člen je  $b$ , kde  $a, b$  sú reálne čísla. Jedenásty člen tejto postupnosti je:

A  B   
C  D

A:  $\frac{b^2}{a^2}$  B:  $\frac{b^3}{a^2}$  C:  $\frac{b^2}{a^3}$  D:  $\frac{b^3}{a^3}$

---

**Riešenie.** Nech  $a_n$  je  $n$ -tý člen geometrickej postupnosti. Z textu príkladu vyplýva, že  $a_2 = a$  a  $a_5 = b$ . Je známe, že medzi  $s$ -tým a  $r$ -tým členom geometrickej postupnosti platí vzťah

$$a_s = a_r q^{s-r}, \tag{13.2}$$

kde  $q$  je kvocient tejto postupnosti. Ak tu položíme  $s = 5$  a  $r = 2$ , tak dostaneme  $a_5 = a_2 q^{5-2}$ , t. j.  $b = a q^3$ . Potom

$$q = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}. \tag{13.3}$$

Podľa (13.2) môžeme jedenásty člen určiť napr. z piateho člena takto (teraz je  $s = 11$  a  $r = 5$ ):  $a_{11} = a_5 q^{11-5} = b q^6$ . Potom vzhľadom na (13.3) je

$$a_{11} = b \left( \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)^6 = b \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^6 = b \left( \frac{b}{a} \right)^2 = \frac{b^3}{a^2}.$$

Preto správna je odpoveď B.

---

---

7. Pre členy geometrickej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  platia rovnice  $a_3 - a_1 = 9$  a  $a_2 + a_3 = 6$ . Kvocient  $q$  tejto postupnosti je:

A  B   
C  D

A: 3 B: -1 C: 2 D: -2

---

**Riešenie.** Základné charakteristiky geometrickej postupnosti sú jej prvý člen  $a_1$  a kvocient  $q$ . Je známe, že pre  $n$ -tý člen  $a_n$  danej postupnosti platí vzťah  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ . Pomocou neho môžeme vyjadriť tie členy postupnosti, ktoré vystupujú v daných rovniciach:

$$a_3 = a_1 q^2 \quad \text{a} \quad a_2 = a_1 q.$$

Požadované rovnice nadobudnú tvar

$$\begin{aligned}a_1q^2 - a_1 &= 9, \\ a_1q + a_1q^2 &= 6\end{aligned}$$

a po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned}a_1(q^2 - 1) &= 9, \\ a_1(1 + q)q &= 6.\end{aligned}$$

Podiel ľavých strán týchto rovníc sa rovná podielu ich pravých strán, t. j.

$$\frac{a_1(q^2 - 1)}{a_1(1 + q)q} = \frac{9}{6}.$$

Keďže  $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$ , tak po krátení zlomkov na oboch stranách tejto rovnice dostaneme

$$\frac{q - 1}{q} = \frac{3}{2}.$$

Potom  $2q - 2 = 3q$ , a teda  $q = -2$ . Správna odpoveď je D.

---

---

8. Ak k číslam 2; 7; 17 pripočítame to isté reálne číslo, dostaneme prvé tri členy geometrickej postupnosti. Pripočítali sme číslo:

A  B

C  D

A: 8    B: 3    C: -2    D: -1

---

**Riešenie.** Nech  $x$  je číslo, ktoré treba pripočítať k daným číslam 2; 7; 17, aby vznikli prvé tri členy  $a_1; a_2; a_3$  geometrickej postupnosti. Potom platí

$$a_1 = 2 + x, \quad a_2 = 7 + x \quad \text{a} \quad a_3 = 17 + x.$$

Je známe, že ak  $q$  je kvocient geometrickej postupnosti, tak pre členy tejto postupnosti platí rovnosť

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Takto pre  $n = 2$  a pre  $n = 3$  je

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \text{ale aj} \quad \frac{a_3}{a_2} = q.$$

Odtiaľ ľahko vidno, že

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2},$$

čo v našom prípade znamená, že

$$\frac{7 + x}{2 + x} = \frac{17 + x}{7 + x}.$$

Ak vynásobíme obe strany tejto rovnice výrazom  $(2 + x)(7 + x)$ , tak dostaneme ročnicu

$$(7 + x)(7 + x) = (17 + x)(2 + x),$$

ktorú vyriešime týmito jednoduchými úpravami:

$$\begin{aligned}49 + 14x + x^2 &= 34 + 19x + x^2, \\ 15 &= 5x, \\ x &= 3.\end{aligned}$$

Správna je odpoveď B.

---

---

9. Prvý člen geometrickej postupnosti je 6 a jej štvrtý člen je  $-48$ . Súčet prvých ôsmich členov tejto postupnosti je:

A  B

C  D

A:  $-255$  B:  $-1020$  C:  $-510$  D:  $-192$

---

**Riešenie.** Základné charakteristiky geometrickej postupnosti sú jej prvý člen  $a_1$  a kvocient  $q$ . Prvý člen postupnosti je 6. Kvocient získame zo vzťahu

$$a_4 = a_1 \cdot q^3,$$

čo je špeciálny prípad vzorca  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  pre  $n = 4$ . Takto

$$-48 = 6 \cdot q^3,$$

a teda  $q^3 = -8$ . Odtiaľ dostávame  $q = -2$ .

Pre súčet  $s_n$  prvých  $n$  členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{kde } q \neq 1. \quad (13.4)$$

Našou úlohou je určiť súčet  $s_8$  prvých ôsmich členov tejto postupnosti. K tomu stačí vo (13.4) zvoliť  $n = 8$ :

$$s_8 = 6 \cdot \frac{1 - (-2)^8}{1 + 2} = 6 \cdot \frac{1 - 256}{3} = -510.$$

Správna odpoveď je C.

## 13.2 Úlohy

- 
1. Tretí člen aritmetickej postupnosti je 28 a jej ôsmy člen je 3. Dvanásty člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: -22 B: -12 C: 12 D: -17
- 
2. Pre členy aritmetickej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  platí  $a_2 + a_3 = 34$  a  $3a_2 - a_4 = 4$ . Diferencia tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 4 B: 10 C: 2 D: 5
- 
3. Pre členy aritmetickej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  platí  $a_1 + a_7 = 22$  a  $a_1 \cdot a_4 = 22$ . Prvý člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 11 B: 1 C: 2 D: -3
- 
4. Medzi čísla 2 a 162 vložíme tri čísla tak, že spolu s danými číslami tvoria prvých päť členov aritmetickej postupnosti. Vložili sme čísla: A  B   
C  D   
A: 4; 8; 16 B: 6; 18; 54 C: 42; 82; 122 D: 10; 50; 250
- 
5. Ak  $3n - 5$  je  $n$ -tý člen aritmetickej postupnosti, tak súčet prvých piatich členov tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 20 B: -10 C: 30 D: 25
- 
6. Tretí člen aritmetickej postupnosti je -4 a jej siedmy člen je 2. Súčet prvých dvanástich členov tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 5 B: 3 C: 15 D: 9,5
- 
7. Korene rovnice  $x^2 - 7x + 10 = 0$  tvoria prvé dva členy klesajúcej aritmetickej postupnosti. Diferencia tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: -5 B: -3 C: -2 D: -1
- 
8. Jedenásty člen aritmetickej postupnosti je 3 a jej diferencia je 2. Súčet prvých dvadsiatich členov tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 20 B: 40 C: 21 D: 12
- 
9. Súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné deviatimi a sú menšie ako 100 je: A  B   
C  D   
A: 694 B: 385 C: 495 D: 594
- 
10. Súčet prvých  $n$  členov aritmetickej postupnosti je  $s_n = n^2 + 3n$ . Piaty člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D   
A: 80 B: 24 C: 12 D: 40
- 
11. Pre členy aritmetickej postupnosti platí  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 5$  a  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 10$ . Diferencia tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A:  $\frac{2}{3}$  B:  $\frac{5}{3}$  C:  $\frac{1}{2}$  D:  $\frac{4}{3}$

---

12. Prvé dva členy klesajúcej geometrickej postupnosti sú z množiny  $\{12; 24\}$ . Prvých päť členov tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A: 24; 12; 6; 3; 1 B: 12; 24; 36; 48; 60 C: 24; 12; 6; 3; 1,5 D: 24; 12; 0; -12; -24

---

13. Ak  $n$ -tý člen geometrickej postupnosti je daný predpisom  $a_n = 3^{n-2}$ , tak súčet jej prvých štyroch členov je: A  B   
C  D

A:  $\frac{13}{3}$  B:  $\frac{40}{3}$  C:  $\frac{1}{3}$  D: 12

---

14. Ak  $n$ -tý člen geometrickej postupnosti je daný predpisom  $a_n = 2^{2-n}$ , tak jej kvocient je: A  B   
C  D

A:  $\frac{1}{2}$  B: 2 C: -2 D:  $-\frac{1}{2}$

---

15. Pre členy geometrickej postupnosti platí  $a_3 = -2$  a  $a_6 = 16$ . Desiaty člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A: -32 B: 32 C: -128 D: 256

---

16. Kvocient geometrickej postupnosti je  $\sqrt{2}$  a pre jej členy platí  $a_1 = 1$  a  $a_n = 32$ . Potom  $n$  sa rovná: A  B   
C  D

A: 9 B: 15 C: 11 D: 7

---

17. Členy geometrickej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  vyhovujú rovniciam  $a_2 - a_1 = 15$  a  $a_3 - a_2 = 60$ . Prvý člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A: 5 B: 4 C: 20 D: 80

---

18. Ak k číslam 1; 13; 49 pripočítame to isté číslo  $x$ , dostaneme tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Číslo  $x$  je: A  B   
C  D

A: 2 B: 5 C: 4 D: 10

---

19. Druhý člen rastúcej geometrickej postupnosti je 6 a jej štvrtý člen je 54. Kvocient tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A: -2 B: 4 C: 3 D: 2

---

20. Medzi čísla 2 a 162 sme vložili tri čísla tak, že spolu s danými číslami tvoria prvých päť členov rastúcej geometrickej postupnosti. Vložili sme čísla: A  B   
C  D

A: 4; 8; 16 B: 6; 18; 54 C: 8; 32; 128 D: 10; 50; 250

---

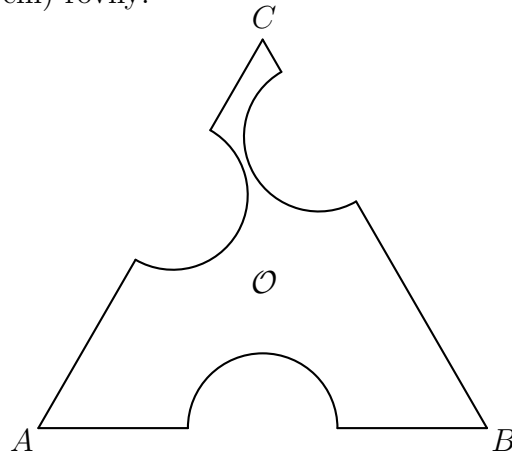
21. Súčet prvých  $n$  členov geometrickej postupnosti je  $s_n = 3(2^n - 1)$ . Piaty člen tejto postupnosti je: A  B   
C  D

A: 96 B: 24 C: 48 D: 93

## 14 Riešenie základných úloh geometrie $n$ -uholníkov

### 14.1 Riešené príklady

1. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikne z rovnostranného trojuholníka  $ABC$  s dĺžkou strany  $a$  cm vyrezaním troch polkruhových výrezov, každý s priemerom  $d = \frac{a}{3}$  cm. Obvod oblasti  $\mathcal{O}$  je (v cm) rovný:



A:  $a \left( 3 + \frac{\pi}{2} \right)$    B:  $a \left( 3 + \frac{\pi}{3} \right)$    C:  $a \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right)$    D:  $a \left( 2 + \frac{\pi}{3} \right)$

**Riešenie.** Je zrejmé, že obvod oblasti  $\mathcal{O}$  určíme, ak spočítame dĺžku „rovných“ častí hranice, ktorá je na každej strane trojuholníka rovná

$$a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3} \text{ [cm]}$$

s dĺžkou troch polkružníc s polomerom

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a}{6} \text{ [cm]}$$

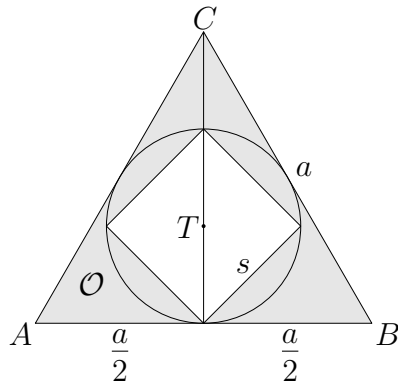
(obvod celej kružnice je rovný  $2\pi r$ ). Teda obvod  $\mathcal{O}$  oblasti  $\mathcal{O}$  je

$$O = 3 \cdot \frac{2a}{3} + 3 \cdot \pi \frac{a}{6} = a \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right) \text{ [cm]}.$$

Správna odpoveď je C.

2. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikla z rovnostranného trojuholníka  $ABC$  s dĺžkou strany  $a$  vyrezaním štvorca vpísaného do vpísanej kružnice  $ABC$ . Obsah oblasti  $\mathcal{O}$  je rovný:

A:  $\frac{a^2}{6}(\sqrt{3}-1)$     B:  $\frac{a^2}{12}(3\sqrt{3}-2)$     C:  $\frac{a^2}{6}(2\sqrt{3}-1)$     D:  $\frac{a^2}{12}(5\sqrt{3}-2)$



**Riešenie.** Je zrejmé, že od obsahu trojuholníka  $ABC$  je potrebné odpočítať obsah štvorca. Najprv určíme veľkosť jeho strany. Začneme výpočtom veľkosti polomeru vpísanej kružnice. Je zrejmé, že stred vpísanej kružnice rovnostranného trojuholníka je presne v ťažisku, a preto je polomer  $r_v$  vpísanej kružnice rovný tretine dĺžky ťažnice, ktorá je v tomto prípade zároveň výškou rovnostranného trojuholníka. Keďže výška tvorí odvesnu pravouhlého trojuholníka s veľkosťou prepony  $a$  a s dĺžkou druhej odvesny rovnou  $\frac{a}{2}$ , použijeme na jej výpočet Pytagorovu vetu:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (14.1)$$

Polomer vpísanej kružnice je teda

$$r_v = \frac{1}{3} \cdot v = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Na určenie veľkosti  $s$  strany štvorca využijeme znova Pytagorovu vetu pre trojuholník tvoriaci štvrtinu štvorca s odvesnami dĺžky  $r_v$  a s preponou veľkosti  $s$ :

$$s = \sqrt{r_v^2 + r_v^2} = \sqrt{2} \cdot r_v = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{\sqrt{6}}{6} a.$$

Ďalej s využitím (14.1) určíme obsah  $S_\Delta$  rovnostranného trojuholníka ako

$$S_\Delta = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2. \quad (14.2)$$

Obsah štvorca  $S_\square$  je

$$S_\square = s^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6} a\right)^2 = \frac{6}{36} a^2 = \frac{a^2}{6}.$$

Hľadaný obsah oblasti  $\mathcal{O}$  je teda:

$$S = S_\Delta - S_\square = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{a^2}{6} = (3\sqrt{3}-2) \cdot \frac{a^2}{12}.$$

Správna je odpoveď B.

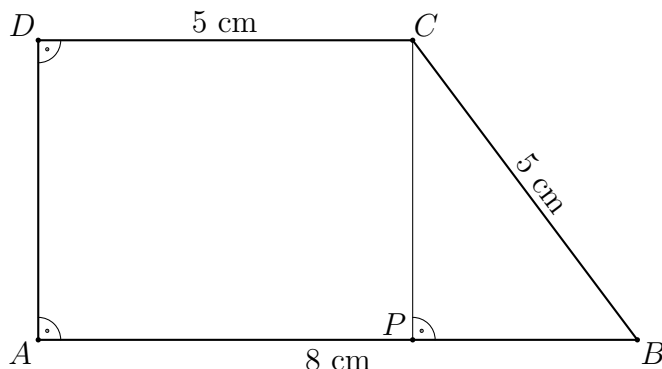
3. Obvod pravouhlého lichobežníka  $ABCD$  s pravými uhlami pri vrcholoch  $A$  a  $D$ , so stranami dlhými  $|AB| = 8$  cm,  $|BC| = 5$  cm a  $|CD| = 5$  cm je (v cm) rovný:

A  B

C  D

A: 20 B: 21 C: 22 D: 23

**Riešenie.** Načrtne obrázok a vyznačíme do neho zadané údaje a pomocné informácie.



Ak spustíme z vrcholu  $C$  kolmicu na stranu  $AB$  a určíme jej päť  $P$ , tak vznikne pravouhlý trojuholník  $CPB$ . Jeho prepona má dĺžku 5 cm a odvesna má dĺžku  $8 - 5 = 3$  cm. Preto je jeho druhá odvesna na základe Pytagorovej vety dlhá

$$|PC| = |DA| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ [cm]}.$$

Obvod lichobežníka je

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 8 + 5 + 5 + 4 = 22 \text{ [cm]}.$$

Správna odpoveď je C.

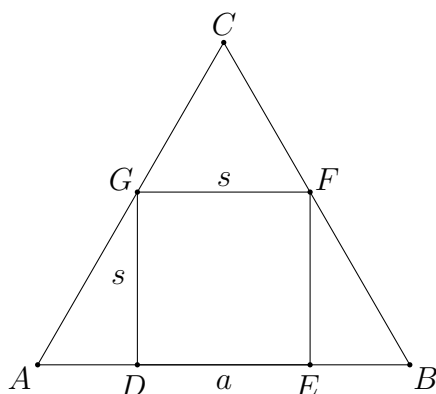
4. Do rovnostranného trojuholníka  $ABC$  s veľkosťou strany  $a$  je vpísaný štvorec  $DEFG$  tak, že jeho strana  $DE$  leží na strane trojuholníka  $AB$ . Obvod štvorca  $DEFG$  sa rovná:

A  B

C  D

A:  $4(2\sqrt{3} - 3)a$  B:  $8(\sqrt{2} - 1)a$  C:  $12(\sqrt{3} - 1)a$  D:  $4(3\sqrt{2} - 2)a$

**Riešenie.** Najprv načrtne rovnostranný trojuholník s veľkosťou strany  $|AB| = a$  a s vpísaným štvorcem, pričom veľkosť strany štvorca označíme  $s$ .



Veľkosť strany štvorca  $s$  určíme využitím podobnosti trojuholníkov  $ABC$  a  $GFC$  (overte, že trojuholníky sú podobné). Zostavíme pomer veľkostí základní a výšok týchto rovnostranných trojuholníkov, pričom na výpočet výšky rovnostranného trojuholníka použijeme vyššie odvodený vzťah (14.1):

$$v_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad v_{\Delta GFC} = v_{\Delta ABC} - s = \frac{\sqrt{3}}{2} a - s,$$

$$\frac{s}{a} = \frac{v_{\Delta GFC}}{v_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a - s}{\frac{\sqrt{3}}{2} a}$$

a po vynásobení výrazom  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$  máme

$$\frac{\sqrt{3}}{2} s = \frac{\sqrt{3}}{2} a - s$$

a po prenesení  $s$  na ľavú stranu bude

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} s = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Po prenasobení rovnosti výrazom  $\frac{2}{2 + \sqrt{3}}$  dostávame

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} a.$$

Na záver odstránime odmocniny v menovateli výrazu rozšírením zlomku jednotkou pomocou „združeného“ výrazu a následnými úpravami menovateľa:

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} a = (2\sqrt{3} - 3) a.$$

Obvod štvorca  $DEFG$  sa rovná

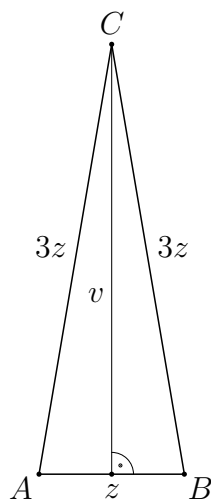
$$O = 4 \cdot s = 4(2\sqrt{3} - 3) a.$$

Správna odpoveď je A.

5. Ramená rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou  $z$  majú v porovnaní so základňou trojnásobnú veľkosť. Obsah trojuholníka sa rovná:

A  B   
C  D

A:  $\frac{\sqrt{32}}{4} z^2$     B:  $\frac{\sqrt{33}}{4} z^2$     C:  $\frac{\sqrt{34}}{4} z^2$     D:  $\frac{\sqrt{35}}{4} z^2$



**Riešenie.** Načrtneme obrázok a vyznačíme údaje zo zadania spolu s pomocnými informáciami. Pri riešení využijeme Pytagorovu vetu podobne ako v príklade 2, tentoraz pre pravouhlý

trojuholník tvorený polovicou základne o dĺžke  $\frac{z}{2}$  ako odvesnou, ramenom dlhým  $3z$  ako preponou a výškou s veľkosťou  $v$  ako druhou odvesnou (porovnajzte úpravy s úpravami v (14.1)):

$$v = \sqrt{(3z)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(9 - \frac{1}{4}\right)z^2} = \sqrt{\frac{36-1}{4}}z = \frac{\sqrt{35}}{2}z.$$

Teda pre obsah  $S$  trojuholníka  $ABC$  dostávame

$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2}z \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}z = \frac{\sqrt{35}}{4}z^2.$$

Správna odpoveď je D.

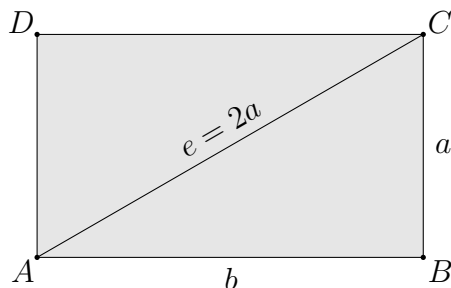
6. Veľkosť uhlopriečky obdĺžnika  $ABCD$  je dvojnásobkom veľkosti jednej z jeho strán, ktorá je  $a$ . Obsah obdĺžnika  $ABCD$  sa rovná:

A  B

C  D

A:  $\sqrt{2}a^2$  B:  $\sqrt{3}a^2$  C:  $2a^2$  D:  $\sqrt{5}a^2$

**Riešenie.** Najprv načrtne obdĺžnik a vyznačíme veľkosti jeho strán a uhlopriečky.



Uhlopriečka obdĺžnika spolu s jeho stranami tvoria pravouhlý trojuholník s uhlopriečkou ako preponou. Veľkosť  $b$  druhej strany obdĺžnika určíme na základe Pytagorovej vety:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a,$$

a teda obsah obdĺžnika je:

$$S = a \cdot b = a \cdot \sqrt{3}a = \sqrt{3}a^2.$$

Správna je odpoveď B.

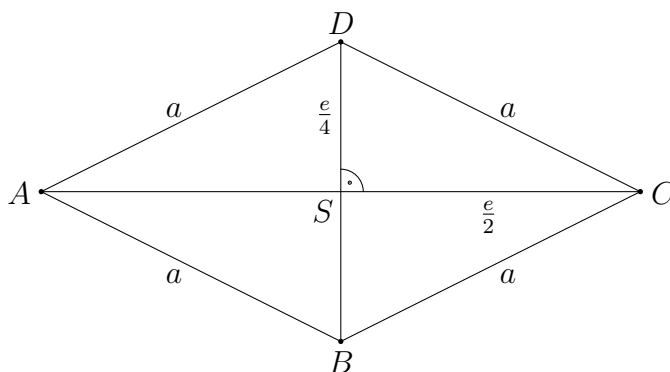
7. Kosoštvorec  $ABCD$  má jednu uhlopriečku dĺžky  $e$ . Druhá uhlopriečka je dvakrát kratšia. Obvod kosoštvorca  $ABCD$  sa rovná:

A  B

C  D

A:  $2e$  B:  $\sqrt{5}e$  C:  $\sqrt{6}e$  D:  $\sqrt{7}e$

**Riešenie.** Najprv načrtne kosoštvorec so stranou dĺžky  $a$ , do náčrtu vyznačíme zadané údaje. Veľkosť dlhšej uhlopriečky je  $|AC| = e$ , a preto je jej polovica rovná  $|SC| = \frac{e}{2}$ , pričom  $S$  je stred uhlopriečky. Polovica druhej uhlopriečky má teda dĺžku  $|SD| = \frac{e}{4}$ .



Základnými vlastnosťami kosoštvorca sú okrem rovnosti veľkostí jeho strán aj tie, že jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a rozpolujú sa. Preto polovice uhlopriečok spolu so stranou kosoštvorca vytvárajú pravouhlý trojuholník s preponou rovnou veľkosti  $a$  strany kosoštvorca. Preto veľkosť strany  $a$  vypočítame na základe Pytagorovej vety:

$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{16}} = \sqrt{\frac{4e^2 + e^2}{16}} = \sqrt{\frac{5e^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4} e,$$

a teda obvod kosoštvorca je v tomto prípade

$$O = 4a = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}e}{4} = \sqrt{5}e.$$

Správna je odpoveď B.

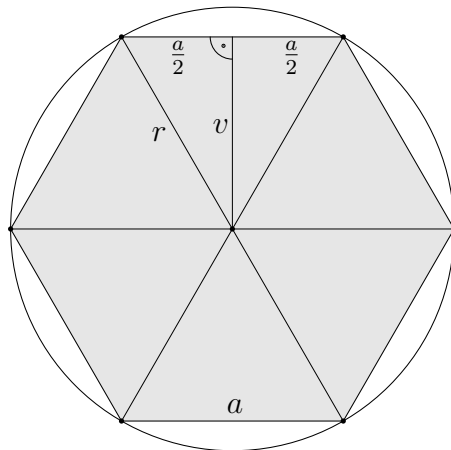
8. Pravidelný šesťuholník je vpísaný do kružnice s polomerom  $r$ . Obsah šesťuholníka sa rovná:

A  B

A:  $\sqrt{2}r^2$     B:  $\sqrt{3}r^2$     C:  $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$     D:  $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$

C  D

**Riešenie.** Najprv načrtneme kružnicu a do nej vpísaný pravidelný šesťuholník. Vyznačíme polomer, dĺžku strany šesťuholníka označíme  $a$ .



Šesťuholník rozdelíme na šesť trojuholníkov tak, že spojíme vrcholy šesťuholníka so stredom kružnice. Šesťuholník je pravidelný, a preto je vnútorný uhol pri strede kružnice každého z trojuholníkov rovný  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ . Keďže všetky trojuholníky sú zároveň rovnoramenné s dĺžkami ramien rovnými polomeru a so základňami totožnými so stranami šesťuholníka, všetky trojuholníky sú rovnostranné, pretože majú všetky uhly rovné  $60^\circ$ . Teda veľkosť strany  $a$  pravidelného šesťuholníka vpísaného do kružnice s polomerom  $r$  je rovná

$$a = r.$$

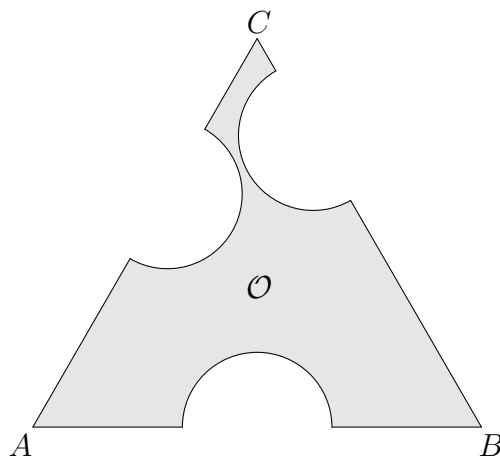
Hľadaný obsah šesťuholníka vypočítame ako šesťnásobok obsahu uvažovaného rovnostranného trojuholníka. Mohli by sme najprv podľa Pytagorovej vety určiť výšku trojuholníka, túto úlohu sme však už riešili v príklade 2. My použijeme priamo vzťah (14.2) na výpočet obsahu rovnostranného trojuholníka. Teda obsah  $S$  šesťuholníka sa rovná

$$S = 6 \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r^2.$$

Správna odpoveď je D.

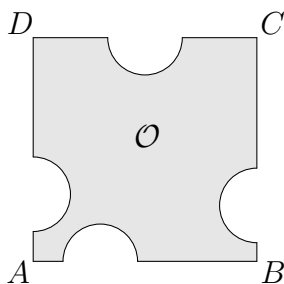
## 14.2 Úlohy

1. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikne z rovnostranného trojuholníka  $ABC$  so stranou dĺžky 6 cm vyrezaním troch polkruhových výrezov, každý s priemerom 2 cm. Plošný obsah oblasti  $\mathcal{O}$  je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný:



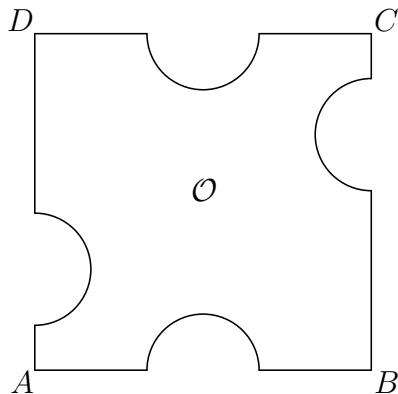
A:  $\frac{2}{3}(6\sqrt{3} - \pi)$    B:  $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$    C:  $\frac{3}{2}(6\sqrt{3} - \pi)$    D:  $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$

2. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikne zo štvorca  $ABCD$  so stranou dĺžky 3 cm vyrezaním štyroch polkruhových výrezov, každý s priemerom 1 cm. Plošný obsah oblasti  $\mathcal{O}$  je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný:



A:  $\frac{1}{2}(16 - \pi)$    B:  $\frac{1}{2}(18 - \pi)$    C:  $\frac{1}{2}(16 + \pi)$    D:  $\frac{1}{2}(18 + \pi)$

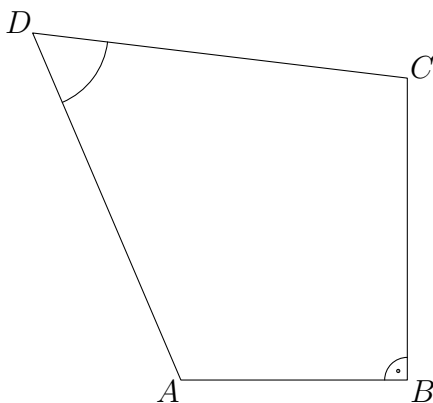
3. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikne zo štvorca  $ABCD$  so stranou dĺžky  $a = 12$  cm vyrezaním štyroch polkruhových výrezov, každý s priemerom 4 cm. Obvod oblasti  $\mathcal{O}$  je (v cm) rovný:



A:  $9(4 + \pi)$    B:  $8(4 + \pi)$    C:  $9(3 + \pi)$    D:  $8(3 + \pi)$

4. Štvoruholník  $ABCD$  má dĺžky strán  $|AB| = 3$  cm a  $|BC| = 4$  cm. Strany  $CD$  a  $DA$  majú rovnakú dĺžku. Uhol pri vrchole  $B$  je pravý, protilahlý uhol pri vrchole  $D$  má veľkosť  $60^\circ$ . Obvod štvoruholníka  $ABCD$  je (v cm) rovný:

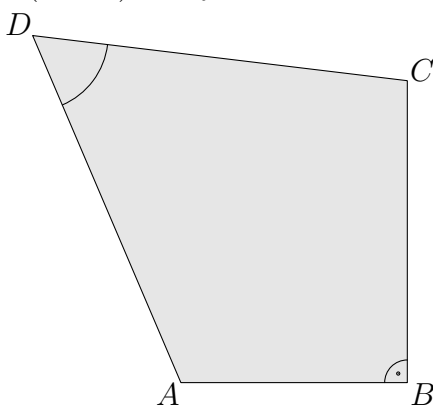
A  B   
C  D



A: 15    B: 16    C: 17    D: 18

5. Štvoruholník  $ABCD$  má dĺžky strán  $|AB| = 3$  cm a  $|BC| = 4$  cm. Strany  $CD$  a  $DA$  majú rovnakú dĺžku. Uhol pri vrchole  $B$  je pravý, protilahlý uhol pri vrchole  $D$  má veľkosť  $60^\circ$ . Obsah štvoruholníka  $ABCD$  je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný:

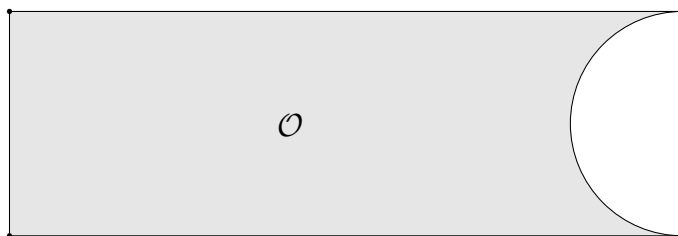
A  B   
C  D



A:  $\frac{21 + 22\sqrt{3}}{4}$     B:  $\frac{22 + 23\sqrt{3}}{4}$     C:  $\frac{23 + 24\sqrt{3}}{4}$     D:  $\frac{24 + 25\sqrt{3}}{4}$

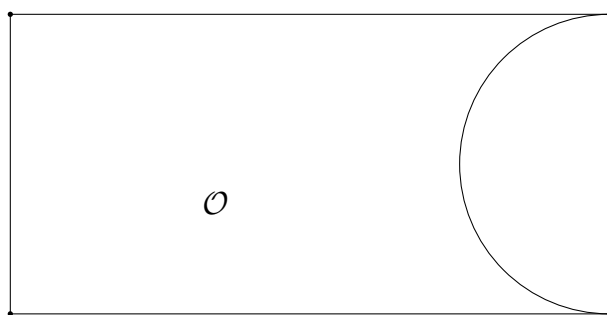
6. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikla z obdĺžnika so stranami dlhými 3 cm a 9 cm vyrezaním polkruhu. Obsah oblasti  $\mathcal{O}$  je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný:

A  B   
C  D



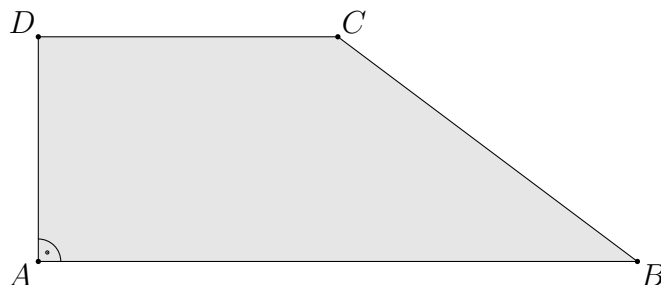
A:  $\frac{9}{8}(22 - \pi)$     B:  $\frac{9}{8}(24 - \pi)$     C:  $\frac{9}{8}(26 - \pi)$     D:  $\frac{9}{8}(28 - \pi)$

7. Na obrázku je znázornená oblasť  $\mathcal{O}$ , ktorá vznikla z obdĺžnika so stranami dlhými 4 cm a 8 cm vyrezaním polkruhu. Obvod oblasti  $\mathcal{O}$  je (v cm) rovný:



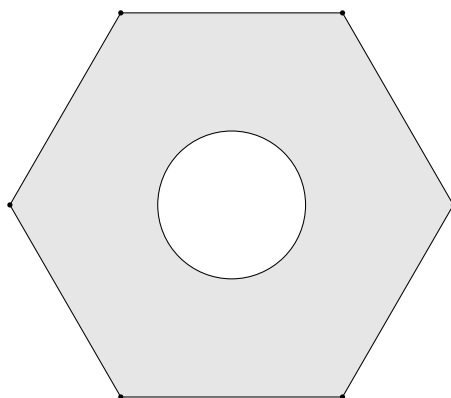
- A:  $2(10 + \pi)$    B:  $2(5 + \pi)$    C:  $4(5 + \pi)$    D:  $4(10 + \pi)$

8. Obsah pravouhlého lichobežníka  $ABCD$  s pravými uhlami pri vrcholoch  $A$  a  $D$ , s dĺžkami strán  $|AB| = 8$  cm,  $|BC| = 5$  cm a  $|CD| = 4$  cm je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný:



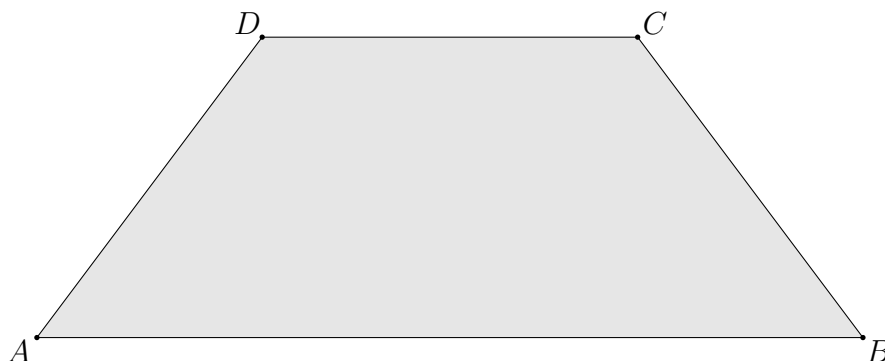
- A: 18   B: 20   C: 22   D: 24

9. Na obrázku je znázornený trávnik v tvare pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 6 m. Vo vnútri šesťuholníka je fontánka v tvare kruhu s priemerom 4 m. Plocha trávinatej časti je (v  $\text{m}^2$ ) rovná:



- A:  $51\sqrt{3} - 4\pi$    B:  $52\sqrt{3} - 4\pi$    C:  $53\sqrt{3} - 4\pi$    D:  $54\sqrt{3} - 4\pi$

10. Obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 11$  cm,  $|BC| = 5$  cm a  $|CD| = 5$  cm je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný: A  B   
C  D



A: 26 B: 28 C: 30 D: 32

11. Obvod rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 9$  cm,  $|CD| = 7$  cm a s výškou 3 cm je (v cm) rovný: A  B   
C  D



A:  $2(4 + \sqrt{10})$  B:  $2(8 + \sqrt{10})$  C:  $2(12 + \sqrt{10})$  D:  $2(16 + \sqrt{10})$

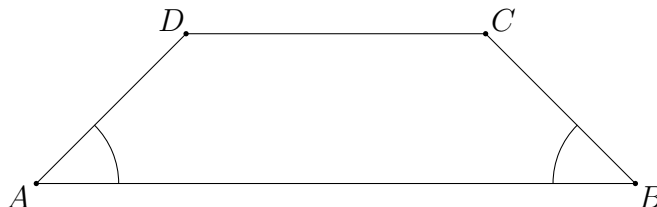
12. Súčet veľkostí vnútorných vrcholových uhlov päťuholníka je rovný: A  B   
C  D

A:  $520^\circ$  B:  $530^\circ$  C:  $540^\circ$  D:  $550^\circ$

13. Pomer veľkostí vnútorných vrcholových uhlov štvoruholníka je  $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 2 : 3 : 4$ . Veľkosť uhla  $\gamma$  je rovná: A  B   
C  D

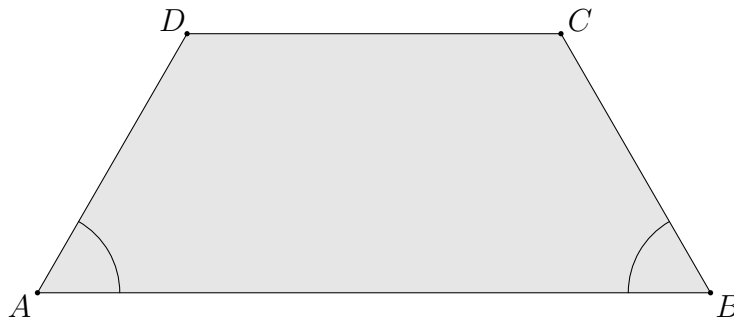
A:  $108^\circ$  B:  $114^\circ$  C:  $120^\circ$  D:  $126^\circ$

14. Obvod rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 8$  cm,  $|CD| = 4$  cm a s veľkosťou uhlov pri vrcholoch  $A$  a  $B$  rovnou  $45^\circ$  je (v cm) rovný: A  B   
C  D



A:  $4(3 + \sqrt{2})$  B:  $4(3 + \sqrt{3})$  C: 20 D:  $4(3 + \sqrt{5})$

- 
15. Obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 9$  cm,  $|CD| = 5$  cm a s veľkosťou uhlov pri vrcholoch  $A$  a  $B$  rovnou  $60^\circ$  je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný: A  B   
C  D



- A: 14    B:  $14\sqrt{2}$     C:  $14\sqrt{3}$     D: 28

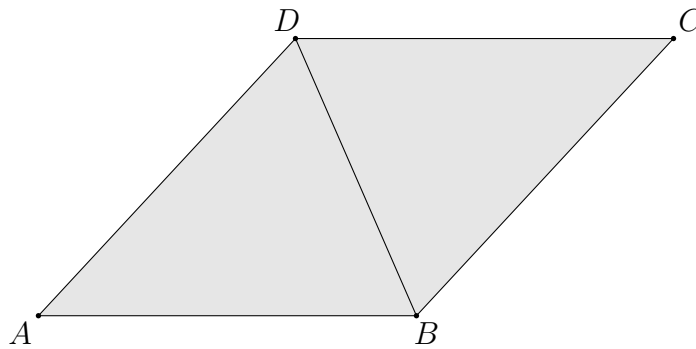
- 
16. Rovnoramenný trojuholník so základňou dlhou 7 cm má výšku 1 cm. Obvod trojuholníka sa (v cm) rovná: A  B   
C  D

- A:  $7 + \sqrt{51}$     B:  $7 + \sqrt{52}$     C:  $7 + \sqrt{53}$     D:  $7 + \sqrt{54}$

- 
17. Veľkosť uhlopriečky obdĺžnika je štvornásobkom veľkosti jednej z jeho strán, ktorá je 3 cm. Obvod obdĺžnika sa (v cm) rovná: A  B   
C  D

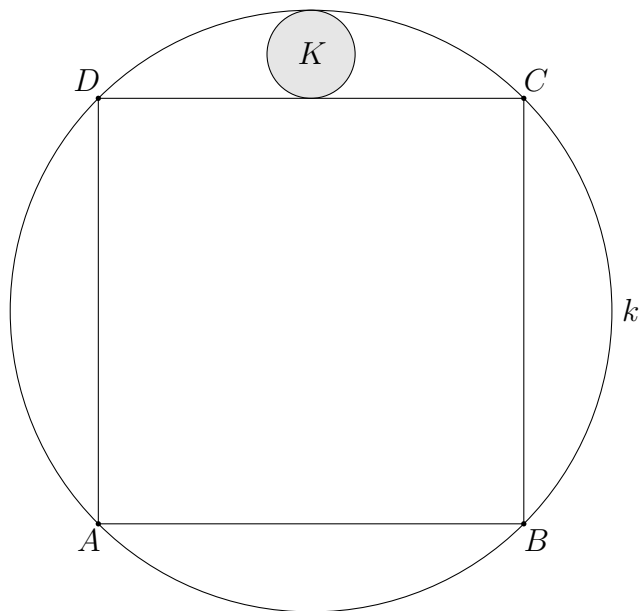
- A:  $2(3 + \sqrt{130})$     B:  $6(1 + \sqrt{15})$     C:  $2(3 + \sqrt{140})$     D:  $2(3 + \sqrt{145})$

- 
18. Kosoštvorec  $ABCD$  so stranou dlhou 5 cm má jednu uhlopriečku, ktorej dĺžka je 4 cm. Obsah kosoštvorca  $ABCD$  sa (v  $\text{cm}^2$ ) rovná: A  B   
C  D



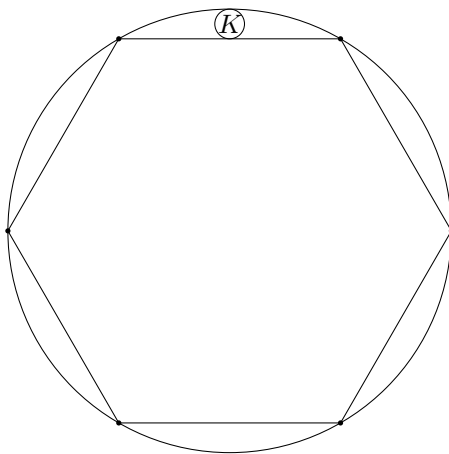
- A:  $4\sqrt{21}$     B:  $4\sqrt{22}$     C:  $4\sqrt{23}$     D:  $4\sqrt{24}$

19. Štvorec  $ABCD$  je vpísaný do kružnice  $k$  s polomerom 4 cm. Medzi štvorcem a kružnicou je vpísaný kruh  $K$  s maximálnym obsahom. Obsah kruhu  $K$  sa (v  $\text{cm}^2$ ) rovná:  A  B  C  D



A:  $\pi(6 - \sqrt{2})$    B:  $2\pi(3 - \sqrt{2})$    C:  $3\pi(2 - \sqrt{2})$    D:  $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$

20. Do kružnice s polomerom 3 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník. Medzi šesťuholníkom a kružnicou je vpísaný kruh  $K$  s maximálnym obsahom. Obvod kruhu  $K$  sa (v cm) rovná:  A  B  C  D



A:  $\pi(2 - \sqrt{3})$    B:  $\frac{3\pi(2 - \sqrt{3})}{2}$    C:  $\pi(3 - \sqrt{3})$    D:  $\frac{3\pi(3 - \sqrt{3})}{2}$

# 15 Percentá

## 15.1 Riešené príklady

---

---

1. Jeden liter benzínu stál 1,25 €. Zdražiel o 8%. Po zdražení stojí jeden liter benzínu:

A  B

A: 1,33 € B: 1,31 € C: 1,28 € D: 1,35 €

C  D

---

**Riešenie.** Pôvodná cena benzínu tvorí základ  $z = 1,25$ , ktorému zodpovedá 100%. Keďže zdražiel o 8%, jeho nová cena je 108% zo základu  $z$  (t. j. počet percent  $p = 108$ ). Stačí vypočítať príslušnú percentovú časť  $\check{c}$ :

$$\check{c} = \frac{p}{100} \cdot z = \frac{108}{100} \cdot 1,25 = 1,35,$$

a preto správna odpoveď je D.

Zdá sa, že táto úloha sa jednoduchšie dala vyriešiť pomocou trojčlenky (evidentne ide o priamu úmernosť):

$$\left[ \begin{array}{l} \uparrow 108\% \dots\dots\dots \check{c} \uparrow \\ 100\% \dots\dots\dots 1,25 \end{array} \right]$$

a odtiaľ

$$\frac{108}{100} = \frac{\check{c}}{1,25}, \quad \text{a teda} \quad \check{c} = \frac{108}{100} \cdot 1,25 = 1,35.$$

---

---

2. Počítač zlacnel v rámci akcie o 21 €, pričom jeho nová cena je 259 €. Počítač zlacnel o:

A  B

A: 7,5% B: 8,1% C: 9,2% D: 10%

C  D

---

**Riešenie.** Pôvodná cena počítača bola

$$21 + 259 = 280 \text{ [€]},$$

čo je základ  $z$  pre výpočet percent. Zlacnenie predstavuje percentovú časť, teda  $\check{c} = 21$ . Pre počet percent  $p$ , o ktorý sa znížila cena počítača, platí

$$p = \frac{\check{c}}{z} \cdot 100 = \frac{21}{280} \cdot 100 = 7,5. \tag{15.1}$$

Preto správna odpoveď je A.

„Nepriatelia vzorčekov“ by tu asi radšej siahli po trojčlenke

$$\left[ \begin{array}{l} \uparrow p\% \dots\dots\dots 21 (\check{c} - \text{zlacnenie}) \uparrow \\ 100\% \dots\dots\dots 280 (z - \text{pôvodná cena}) \end{array} \right]$$

a z nej by dostali

$$\frac{p}{100} = \frac{21}{280}.$$

Odtiaľ

$$p = \frac{21 \cdot 100}{280} = 7,5.$$

Šikovnejší sa dopracujú k výpočtom podľa (15.1) jednoduchou logickou úvahou.

3. Vo firme sa vyrobilo 1 859 výrobkov, čím bol splnený plán na 143%. Počet výrobkov, ktoré sa mali vyrobiť podľa plánu, je:

A  B

C  D

A: 2 658 B: 1 300 C: 1 430 D: 1 310

**Riešenie.** Našou úlohou je určiť základ  $z$  – počet výrobkov, ktorý sa mal vyrobiť podľa plánu. Základu  $z$  zodpovedá 100%. Percentovej časti  $\check{c} = 1\,859$  zodpovedá počet percent  $p = 143$  zo základu. Pre základ platí vzťah

$$z = \frac{\check{c}}{p} \cdot 100,$$

čo v našom prípade dáva

$$z = \frac{1\,859}{143} \cdot 100 = 1\,300.$$

Preto správna odpoveď je B.

Táto úloha sa dala vyriešiť aj pomocou trojčlenky (evidentne ide o priamu úmernosť):

$$\left| \begin{array}{l} 143\% \dots\dots\dots 1\,859 \text{ výrobkov} \\ 100\% \dots\dots\dots z \text{ výrobkov} \end{array} \right|$$

Z nej dostaneme

$$\frac{143}{100} = \frac{1\,859}{z},$$

a teda

$$z = \frac{1\,859 \cdot 100}{143} = 1\,300.$$

Správna je odpoveď B.

4. Traja brigádnicí dostali za svoju prácu spolu 3 150 €. Rozdelili sa o ne podľa svojich výkonov tak, že prvý dostal tretinu z celkovej sumy a druhý dostal o 10% viac ako tretí. Koľko eur dostal každý (v poradí prvý, druhý a tretí) brigádnik?

A  B

C  D

A: 1 050; 1 100; 1 000 B: 1 050; 1 000; 1 100 C: 1 050; 900; 1 200 D: 1 150; 1 100; 900

**Riešenie.** Tretina z 3 150 je 1 050, čo je odmena pre prvého brigádnika. Druhý a tretí takto spolu dostali  $3\,150 - 1\,050 = 2\,100$  [€]. Nech  $x$  je počet eur, ktoré dostal tretí brigádnik. Druhý brigádnik dostal o 10% viac ako tretí – dostal teda 110% z hodnoty  $x$ , čo predstavuje

$$\frac{110}{100} \cdot x = 1,1x.$$

Pre súčet odmien druhého a tretieho brigádnika dostávame

$$1,1x + x = 2\,100.$$

Potom  $2,1x = 2\,100$ , a teda  $x = 1\,000$ , čo je odmena pre tretieho brigádnika. Druhý brigádnik dostal

$$1,1x = 1,1 \cdot 1\,000 = 1\,100 \text{ [eur]}.$$

Brigádnicí si rozdelili eurá tak, že prvý dostal 1 050 €, druhý 1 100 € a tretí 1 000 €. Správna odpoveď je A.

- 
5. Maslo obsahuje 75% tuku, ktorý zo 60% pozostáva z rastlinného tuku. Koľko percent rastlinného tuku obsahuje toto maslo? A  B   
C  D   
 A: 67,5    B: 15    C: 80    D: 45
- 

**Riešenie.** Kto je zbehlý v počítaní s percentami odpovie:  $0,75 \cdot 0,6 = 0,45$ , čo predstavuje 45% rastlinného tuku a ďalej čítať nemusí. Vysvetlime si to! Nech  $z$  je základ – istý počet hmotnostných jednotiek masla. Toto maslo obsahuje

$$t = \frac{75}{100} \cdot z = 0,75z$$

hmotnostných jednotiek masla tuku. Tento tuk obsahuje 60% rastlinného tuku  $t_r$ , a teda

$$t_r = \frac{60}{100} \cdot t = 0,6 \cdot t = 0,6 \cdot (0,75z) = 0,45z.$$

Z toho je už mnohým jasné, že výsledok je 45%. Percentuálny obsah rastlinného tuku dostaneme z faktu že  $z$  hmotnostných jednotiek masla obsahuje  $0,45z$  hmotnostných jednotiek rastlinného masla. Potom percentuálny obsah rastlinného tuku v masle je

$$p = \frac{0,45z}{z} \cdot 100 = 45.$$

Preto správna odpoveď je D.

- 
6. Máme pripraviť 20 litrov šesťdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. K dispozícii máme osemdesiatpercentný roztok kyseliny sírovej a destilovanú vodu (to je voda bez prímiesí), ktorá neobsahuje kyselinu sírovú. Koľko litrov kyseliny sírovej potrebujeme na prípravu požadovaného roztoku? A  B   
C  D   
 A: 10    B: 12    C: 15    D: 5
- 

**Riešenie.** Príklad môžeme vyriešiť napríklad nasledujúcim spôsobom. Nech  $x$  je počet litrov stopercentného koncentrátu<sup>5</sup> kyseliny sírovej, ktorý je obsiahnutý v 20 litroch šesťdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. Potom

$$x = \frac{60}{100} \cdot 20 = 12. \tag{15.2}$$

Poznamenávame, že tento výsledok sme mohli dostať aj z nasledujúcej trojčlenky (ide o nepriamu úmernosť):

$$\left[ \begin{array}{l} 60\% \dots\dots\dots 20 \text{ (litrov)} \\ 100\% \dots\dots\dots x \text{ (litrov)} \end{array} \right]$$

a odtiaľ

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{20}.$$

Teda

$$x = \frac{60}{100} \cdot 20 = 12.$$

---

<sup>5</sup>Takýto koncentrát prakticky neexistuje, ale môžeme robiť o ňom teoretické úvahy

Teraz nám stačí zistiť, koľko litrov osemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej obsahuje 12 litrov stopercentného koncentráту kyseliny sírovej. Ak  $y$  je hľadané množstvo, tak dostaneme

$$y = \frac{100}{80} \cdot 12 = 15.$$

Aj tu sme si mohli pomôcť trojčlenkou. K tým 15 litrom osemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej stačí doliať 5 litrov destilovanej vody, a preto správna odpoveď je C.

Tí, ktorí častejšie pripravujú roztoky určite poznajú zovšeobecnenie tejto úlohy. Máme pripraviť  $x$  litrov  $p_1$ -percentného roztoku istej látky, pričom k dispozícii máme jej  $p_2$ -percentný roztok,  $p_2 > p_1$  a destilovanú vodu. Potom na splnenie úlohy stačí zmiešať

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot x \text{ litrov } p_2\text{-percentného roztoku a } \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)x \text{ litrov destilovanej vody.}$$

---

7. Nové auto stojí 22 000 €. Jeho trhová cena klesne amortizáciou v priebehu každeho roka o 10%. Trhová cena auta bude o dva roky:

A  B

C  D

A: 17 600 €   B: 20 000 €   C: 17 820 €   D: 19 800 €

---

**Riešenie.** Trhová cena auta klesne v priebehu jedného roka o 10%, t. j. jeho cena po jednom roku bude 90% ceny novovyrobeneho auta. Pre túto cenu  $\check{c}$ , tzv. percentovú časť, platí vzťah

$$\check{c} = \frac{p}{100} \cdot z, \quad (15.3)$$

kde  $p$  je počet percent a  $z$  je základná trhová hodnota auta na začiatku sledovaného roku. Takto trhová cena auta po prvom roku je

$$\check{c}_1 = \frac{90}{100} \cdot 22\,000 = 19\,800.$$

V priebehu druhého roka, na začiatku ktorého je jeho cena 19 800 €, trhová cena opat klesne o 10%. Mozeme ju získať podľa (15.3), kde teraz  $z = 19\,800$ :

$$\check{c}_2 = \frac{90}{100} \cdot 19\,800 = 17\,820.$$

Správna odpoveď je C.

Tí, čo mají trochu väčšiu rutinu v poıtanı s percentami, dojdu k záveru napríklad takto:

$$22\,000 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 17\,820.$$

---

8. Klient má v banke uložených 2 500 € s trojpercentnym ročným úrokom. Banka mu na konci roka odvedie z úrokov dvadsaťpercentnú daň. Predpokladáme, že klient na svoje konto ni nevkladá a ani z neho nevyberá. Čistý zısk klienta po uplynutí dvoch rokov bude:

A  B

C  D

A: 90 €   B: 152,25 €   C: 60 €   D: 121,44 €

---

**Riešenie.** Úlohu vyriešıme tak, že „zabudneme na vzorceky“ a budeme vychádzať len z jedného faktu:

$$1\% \text{ z nejakej hodnoty (základu } z) \text{ je jedna stotina tejto hodnoty, t. j. } \frac{1}{100} \cdot z$$

Potom zrejme

$p\%$  z nejakej hodnoty (základu  $z$ ) je  $p$  stotín tejto hodnoty, t. j.  $\frac{p}{100} \cdot z$ .

Banka pripíše klientovi na konci prvého roka trojpercentný úrok z jeho vkladu, čiže úroky vo výške

$$\frac{3}{100} \cdot 2\,500 = 75 \text{ [eur]}$$

20% z týchto úrokov je

$$\frac{20}{100} \cdot 75 = 15 \text{ [eur]}$$

čo predstavuje daň z úrokov, ktorú banka strhne klientovi z úrokov. Takto čistý zisk klienta za prvý rok je úroky mínus daň:

$$z_1 = 75 - 15 = 60 \text{ [eur]}.$$

Po prvom roku bude mať klient na svojom konte pôvodný vklad plus zisk, čo činí

$$2\,500 + 60 = 2\,560 \text{ [eur]}.$$

Tým istým postupom dostaneme aj zisk klienta za druhý rok, len s tým rozdielom, že „vyštartujeme“ hodnotou 2 560 € jeho vkladu na začiatku druhého roka.

Úroky za druhý rok sú

$$\frac{3}{100} \cdot 2\,560 = 76,8 \text{ [eur]}.$$

Daň z úrokov je

$$\frac{20}{100} \cdot 76,8 = 15,36 \text{ [eur]}$$

a zisk klienta za druhý rok je

$$z_2 = 76,8 - 15,36 = 61,44 \text{ [eur]}.$$

Celkový čistý zisk klienta za dva roky je

$$z = z_1 + z_2 = 60 + 61,44 = 121,44 \text{ [eur]},$$

a preto správna odpoveď je D.

Na záver uvedieme zovšeobecnenie tohto príkladu. Vypočítame, koľko eur pribudne klientovi za jeden rok, ak na začiatku roka má na konte vklad  $v$  eur, pričom úročenie jeho vkladu je každý rok  $p_u$ -percentné a daň predstavuje  $p_d$  percent. Na konci roka na úrokoch získa<sup>6</sup> (vklad  $v$  predstavuje základ – 100%)

$$u = \frac{p_u}{100} \cdot v.$$

Ak vám tento vzťah nie je známy, tak si ho odvodte napríklad pomocou trojčlenky:

$$\left[ \begin{array}{l} p_u \dots\dots\dots u \\ 100 \dots\dots\dots v \end{array} \right]$$

Daň  $d$  z týchto úrokov je (teraz základom sú úroky  $u$  a opäť si môžete pomôcť trojčlenkou)

$$d = \frac{p_d}{100} \cdot u = \frac{p_d}{100} \cdot \frac{p_u}{100} \cdot v.$$

<sup>6</sup>všetky medzivýsledky sú v eurách

Je zrejmé, že zisk  $z$  klienta za jeden rok (pri vklade  $v$  eur na začiatku roka) dostaneme, ak od úrokov odčítame daň, teda

$$z = u - d = \frac{p_u}{100} \cdot v - \frac{p_d}{100} \cdot \frac{p_u}{100} \cdot v = \frac{p_u}{100} \left(1 - \frac{p_d}{100}\right) v. \quad (15.4)$$

Pripomínáme, že podľa (15.4) dostaneme ročný zisk klienta na konci roka, ak na začiatku roka mal na konte vklad  $v$  eur.

Teraz vyriešime danú úlohu. Zisk klienta za prvý rok dostaneme, ak v (15.4) dosadíme  $p_u = 3$ ,  $p_d = 20$  a  $v = 2\,500$ :

$$z_1 = \frac{3}{100} \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 2\,500 = 60.$$

Takto po prvom roku bude mať klient na konte  $2\,500 + 60 = 2\,560$  eur. To je vklad pre výpočet jeho zisku v druhom roku. Opäť podľa (15.4) dostaneme

$$z_2 = \frac{3}{100} \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 2\,560 = 61,44.$$

Na konci druhého roku bude mať klient na účte  $2\,560 + 61,44 = 2\,621,44$  eur. Teda jeho zisk za sledované dva roky je  $121,44$  €, čo je v zhode s predchádzajúcim výsledkom.

## 15.2 Úlohy

- 
1. Koľko percent je 498 kg z 3 ton? A  B   
A: 16,6 B: 1,66 C: 49,8 D: 16,2 C  D
- 
2. Koľko minút je 19% z piatich hodín? A  B   
A: 45 B: 19 C: 57 D: 95 C  D
- 
3. Vo firme pracuje 500 zamestnancov, z nich je 45% mužov. Koľko žien pracuje vo firme? A  B   
A: 275 B: 225 C: 50 D: 450 C  D
- 
4. Na zakúpenie prístroja je možné z projektu použiť 360 €, čo je 40% z ceny prístroja. Koľko eur stojí prístroj? A  B   
A: 504 B: 900 C: 400 D: 1 440 C  D
- 
5. Pôvodná cena výrobku bola 48 €. Po zlacnení stojí výrobok 36 €. O koľko percent bola znížená jeho pôvodná cena? A  B   
A: 12 B: 75 C: 84 D: 25 C  D
- 
6. Na konkurze neuspelo 30% uchádzačov z 90 účastníkov. Koľko bolo úspešných účastníkov konkurzu? A  B   
A: 7 B: 63 C: 60 D: 10 C  D
- 
7. Na štátnej záverečnej skúške štúdia sa zúčastnilo 80 študentov. Desiatich z nich prospeli s vyzamenaním, 85% študentov prospelo (bez vyznamenania) a zvyšok študentov neprospeľ. Koľko študentov neprospeľ? A  B   
A: 2 B: 5 C: 10 D: 7 C  D
- 
8. Výstavba železničnej trate stála 192 500 €, čo predstavuje 110% predpokladaných nákladov. Aké boli predpokladané náklady na výstavbu trate? A  B   
A: 17 500 € B: 21 175 € C: 175 000 € D: 211 750 € C  D
- 
9. Firma dosiahla za kalendárny rok zisk 51 000 €. Zo zisku odvieďa dvadsaťpercentnú daň. Zo zvyšku polovicu investovala do svojho rozvoja. Koľko eur firma investovala na svoj rozvoj? A  B   
A: 25 400 B: 25 500 C: 10 200 D: 20 400 C  D
- 
10. Firma dosiahla za kalendárny rok čistý zisk 40 000 €. Zo zisku darovala 10% na charitu a zvyšok rovnomerne rozdelila 200 akcionárom vo forme dividend. Koľko eur dostal každý akcionár? A  B   
A: 50 B: 180 C: 200 D: 20 C  D
- 
11. Firma za ostatné roky investovala do svojho rozvoja. Druhý rok investovala o 60% viac ako v prvom roku a v treťom roku o 40% viac ako v druhom roku. V treťom roku investovala 112 000 €. Koľko eur investovala v prvom roku? A  B   
A: 50 000 B: 62 200 C: 56 000 D: 80 000 C  D

- 
12. Faktúra na 220 € bola splatná do 15. júla. Uhradená bola po tomto termíne. Koľko treba zaplatiť, ak sa za oneskorenú úhradu účtuje jednorázový 30% poplatok z fakturovanej sumy? A  B   
C  D   
A: 268 € B: 235 € C: 286 € D: 250 €
- 
13. Pri sušení húb sa ich hmotnosť zmenší o 85%. Koľko čerstvých húb je potrebné nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených húb? A  B   
C  D   
A: 3,529 kg B: 20 kg C: 25,5 kg D: 28,33 kg
- 
14. Obdĺžnikové klzisko s rozmermi 50 m a 22 m chceme pokryť päťcentimetrovou vrstvou ľadu. Koľko litrov vody na to spotrebujeme, ak je známe, že voda po zamrznutí zväčší svoj objem o 10%? A  B   
C  D   
A: 50 000 B: 55 000 C: 45 000 D: 60 000
- 
15. Klient má v banke uložených 3 000 € s trojpercentným ročným úrokom. Banka mu na konci roka odvedie z úrokov dvadsaťpercentnú daň. Aký je čistý ročný zisk klienta? A  B   
C  D   
A: 60 € B: 6 € C: 54 € D: 72 €
- 
16. V nádobe je 10 litrov sedemdesiatpercentného roztoku kyseliny sírovej. Do nádoby prilejeme 15 litrov destilovanej vody (bez prímies). Koľko percentný roztok kyseliny sírovej získame? A  B   
C  D   
A: 14 B: 28 C: 67 D: 42
- 
17. Dvaja brigádnici dostali za svoju prácu spolu 810 €. Rozdelili sa o ne tak, že 40% z toho, čo dostal prvý brigádnik sa rovnalo 50% z toho, čo dostal druhý brigádnik. Koľko eur dostal prvý brigádnik? A  B   
C  D   
A: 324 B: 405 C: 450 D: 360
- 
18. 75% žiakov triedy chce študovať technické obory. Z nich 60% chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach. Koľko percent žiakov z celej triedy chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach? A  B   
C  D   
A: 36 B: 40 C: 8 D: 45
- 
19. V triede je 25% dievčat. 25% chlapcov tejto triedy chce študovať na Technickej univerzite v Košiciach, čo je o 26 žiakov menej ako je počet žiakov triede. Koľko je žiakov v triede? A  B   
C  D   
A: 32 B: 40 C: 36 D: 28
- 
20. Nektár, ktorý včely zbierajú obsahuje 70% vody. Z nektáru sa istým procesom vytvára med, ktorý obsahuje 19% vody. Koľko kilogramov nektáru musia včely nazbierať na 1 kg medu? A  B   
C  D   
A: 1,3 B: 1,2 C: 2,1 D: 2,7

## 16 Výsledky úloh

### Kapitola 1

1) B • 2) C • 3) A • 4) C • 5) D • 6) A • 7) B • 8) B • 9) C • 10) B • 11) B •  
12) A • 13) D • 14) B • 15) B • 16) B • 17) D • 18) C • 19) D • 20) A •

### Kapitola 2

1) D • 2) B • 3) B • 4) C • 5) A • 6) A • 7) D • 8) C • 9) D • 10) B • 11) A •  
12) D • 13) B • 14) B • 15) A • 16) C • 17) A • 18) D • 19) B • 20) A •

### Kapitola 3

1) C • 2) B • 3) D • 4) B • 5) C • 6) A • 7) B • 8) A • 9) B • 10) A • 11) D •  
12) A • 13) C • 14) B • 15) B • 16) C • 17) D • 18) B • 19) B • 20) B •

### Kapitola 4

1) D • 2) C • 3) D • 4) B • 5) B • 6) D • 7) A • 8) B • 9) B • 10) A • 11) D •  
12) B • 13) C • 14) D • 15) C • 16) A • 17) B • 18) A • 19) D • 20) B •

### Kapitola 5

1) B • 2) A • 3) D • 4) A • 5) C • 6) A • 7) B • 8) D • 9) B • 10) C • 11) A •  
12) C • 13) A • 14) B • 15) C • 16) A • 17) D • 18) D • 19) D • 20) C • 21) C •  
22) A •

### Kapitola 6

1) C • 2) D • 3) D • 4) C • 5) C • 6) A • 7) C • 8) C • 9) B • 10) A • 11) A •  
12) A • 13) D • 14) D • 15) C • 16) A • 17) D • 18) C • 19) A • 20) A • 21) C •

### Kapitola 7

1) B • 2) D • 3) C • 4) D • 5) C • 6) C • 7) B • 8) B • 9) A • 10) A • 11) B •  
12) B • 13) A • 14) A • 15) B • 16) C • 17) B • 18) D • 19) A • 20) A •

### Kapitola 8

1) D • 2) A • 3) A • 4) C • 5) A • 6) C • 7) D • 8) A • 9) B • 10) B • 11) B •  
12) B • 13) A • 14) A • 15) D • 16) A • 17) B • 18) D • 19) A • 20) B •

### Kapitola 9

1) B • 2) C • 3) B • 4) B • 5) D • 6) A • 7) C • 8) C • 9) A • 10) C • 11) B •  
12) D • 13) C • 14) A • 15) D • 16) B • 17) C • 18) B • 19) B • 20) B •

### Kapitola 10

1) B • 2) C • 3) B • 4) C • 5) A • 6) A • 7) C • 8) B • 9) A • 10) B • 11) C •  
12) D • 13) C • 14) D • 15) C • 16) D • 17) C • 18) A • 19) D • 20) C •

### Kapitola 11

1) B • 2) D • 3) D • 4) A • 5) D • 6) B • 7) B • 8) B • 9) C • 10) B • 11) C •  
12) A • 13) B • 14) A • 15) B • 16) D • 17) B • 18) C • 19) B • 20) B •

### Kapitola 12

1) C • 2) B • 3) C • 4) B • 5) C • 6) A • 7) C • 8) C • 9) B • 10) D • 11) C •  
12) B • 13) A • 14) B • 15) A • 16) C • 17) C • 18) A • 19) C • 20) D •

### Kapitola 13

1) D • 2) B • 3) C • 4) C • 5) A • 6) C • 7) B • 8) B • 9) D • 10) C • 11) B •  
12) C • 13) B • 14) A • 15) D • 16) C • 17) A • 18) B • 19) C • 20) B • 21) C •

### Kapitola 14

1) C • 2) B • 3) B • 4) C • 5) D • 6) B • 7) A • 8) A • 9) D • 10) D • 11) B •  
12) C • 13) A • 14) A • 15) C • 16) C • 17) B • 18) A • 19) D • 20) B •

### Kapitola 15

1) A • 2) C • 3) A • 4) B • 5) D • 6) B • 7) A • 8) C • 9) D • 10) B • 11) A •  
12) C • 13) B • 14) A • 15) D • 16) B • 17) C • 18) D • 19) A • 20) D •

# 17 Vzorové testy

## Test 1

Na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí máte 90 minút.<sup>7</sup> Za správnu odpoveď získate 10 bodov, za nesprávnu odpoveď 3 body stratíte. Za nevyplnenú odpoveď sa Vám započíta 0 bodov.

- 
1. Číslo  $-3 + \frac{2}{3} - \frac{0}{4}$  je: A  B   
A: menšie ako  $-\frac{5}{2}$    B: väčšie ako  $-\frac{8}{3}$    C: rovné  $-\frac{1}{3}$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

- 
2. Výraz  $\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{x-4}$  je rovný: A  B   
A:  $\frac{3x}{x-4}$    B:  $\frac{2x\sqrt{x}-x}{x-4}$    C:  $\frac{5x}{x-4}$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

- 
3. Sústava A  B   
$$x + 5y = 6$$
$$-5x - 10y = -15$$
C  D

má v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jediné riešenie  $[x_0, y_0]$ , pre ktoré platí:

- A:  $2x_0 - y_0 = 0$    B:  $2x_0 - y_0 = 1$    C:  $2x_0 - y_0 = 2$    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne

- 
4. Počet párných čísel, ktoré vyhovujú nerovnici  $\frac{8-x}{x+4} > 0$ , je: A  B   
A: 2   B: 3   C: 4   D: 5 C  D

- 
5. Počet riešení rovnice  $|2x+6| + 2x+6 = 0$  je: A  B   
A: 0   B: 1   C: 2   D:  $\infty$  C  D

- 
6. Grafy funkcií  $f: y = 3x - 1$  a  $g: y = -2x + 14$  sa pretínajú v bode: A  B   
A:  $[3; 8]$    B:  $[3; -2]$    C:  $[-1; 14]$    D:  $[0; -1]$  C  D

- 
7. Ak  $f(x) = \frac{4-2x}{x^2}$ , tak hodnota  $f(-0,2)$  je: A  B   
A: -90   B: 11   C: 90   D: 110 C  D

- 
8. Jedna z kvadratických rovníc, ktoré majú oba korene o 5 väčšie ako rovnica  $x^2 - 5x + 6 = 0$  je: A  B   
A:  $x^2 - 15x + 56 = 0$    B:  $x^2 - 10x + 1 = 0$    C:  $x^2 - 6x + 5 = 0$    D:  $x^2 + 11 = 0$  C  D

---

<sup>7</sup>Uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

---

9. Ak  $\log_5 x^2 = 4$ , tak  $3 \log_5 x$  je: A  B   
A: 1 B: 2 C: 3 D: 6 C  D

---

10. Jeden zo smerových vektorov všetkých priamok rovnobežných s priamkou danou rovnicou  $2x - 3y + 1 = 0$  je: A  B   
A:  $(-3; 2)$  B:  $(2; -3)$  C:  $(2; 3)$  D:  $(3; 2)$  C  D

---

11. Rovnica elipsy so stredom v bode  $S = [2; -2]$  a polosami  $a = 3$ ,  $b = 2$  je: A  B   
A:  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y - 1 = 0$  B:  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$  C:  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 80 = 0$  C  D   
D:  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 100 = 0$

---

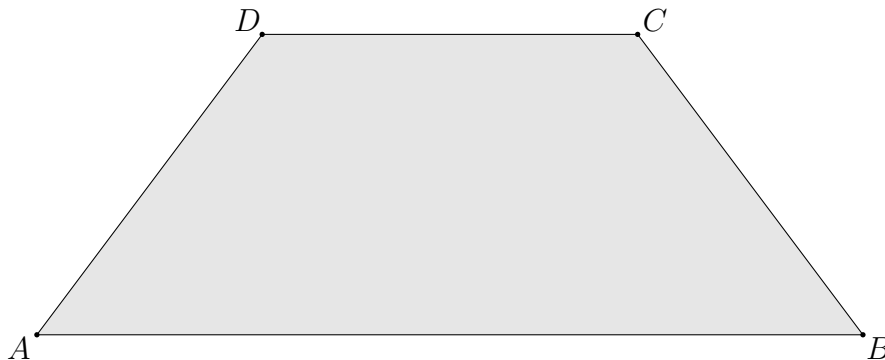
12. Pre  $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je výraz  $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$  rovný výrazu: A  B   
A: 1 B:  $\frac{2}{\sin 2x}$  C:  $2 \operatorname{tg} x$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

13. Súčet prvých  $n$  členov aritmetickej postupnosti je  $s_n = n^2 + 3n$ . Potom piaty člen tejto postupnosti je: A  B   
A: 80 B: 24 C: 12 D: 40 C  D

---

14. Obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 11$  cm,  $|BC| = 5$  cm a  $|CD| = 5$  cm je (v  $\text{cm}^2$ ) rovný: A  B   
C  D



A: 26 B: 28 C: 30 D: 32

---

15. Faktúra na 220€ bola splatná do 15. júla. Uhradená bola po tomto termíne. Koľko treba zaplatiť, ak sa za oneskorenú úhradu účtuje jednorázový 30% poplatok z fakturovanej sumy? A  B   
C  D

A: 268€ B: 235€ C: 286€ D: 250€

## Test 2

Na vyriešenie úloh a označenie správnych odpovedí máte 90 minút.<sup>8</sup> Za správnu odpoveď získate 10 bodov, za nesprávnu odpoveď 3 body stratíte. Za nevyplnenú odpoveď sa Vám započíta 0 bodov.

- 
1. Číslo 0,2 je: A  B   
A: rovné  $\frac{8}{15} - \frac{1}{3}$     B: väčšie ako  $\frac{1}{4}$     C: rovné  $\frac{19}{20} - \frac{1}{4}$     D: menšie ako  $\frac{1}{2} - 1$  C  D
- 

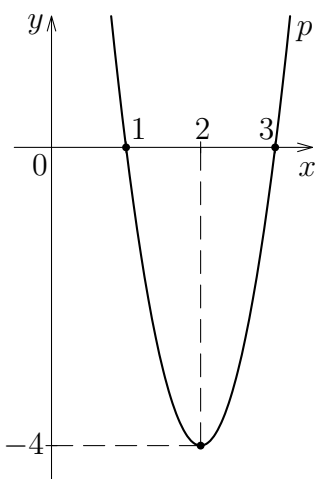
2. Výraz  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$  nie je definovaný pre  $x$  rovné: A  B   
A: -2; -1; 1; 2    B: -2; 1; 2    C: 2    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 

3. V triede je 28 žiakov. Ak by chlapcov bolo o 6 menej, bolo by ich toľko, koľko je dievčat. Počet dievčat v triede je: A  B   
A: 8    B: 11    C: 17    D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D
- 

4. Počet riešení nerovnice  $\frac{x}{x-3} \geq \frac{x+2}{x-7}$  na množine celých kladných čísel je: A  B   
A: 1    B: 3    C: 4    D: 6 C  D
- 

5. Všetky reálne korene rovnice  $|x - 5| + 7 = x^2$  sú z intervalu: A  B   
A:  $(-4; 4)$     B:  $(-3; 3)$     C:  $\langle -4; 4)$     D:  $\langle -4; 3)$  C  D
- 

6. Parabola  $p$ , znázornená na obrázku, A  B   
C  D



je grafom funkcie  $y = f(x)$ , ktorá je daná predpisom:

- A:  $y = (x-1)(x-3)$     B:  $y = (x+1)(x+3)$     C:  $y = -4(x-1)^2(x-3)^2$     D:  $y = 4x^2 - 16x + 12$

---

<sup>8</sup>Uvádzané údaje o časovom limite a počtoch bodov sú orientačné a môžu sa zmeniť.

---

7. Definičným oborom funkcie  $f : y = \log_2(2 - x) - \frac{x + 3}{x}$  je: A  B   
A:  $\mathbb{R} - \{0; 2\}$  B:  $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$  C:  $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$  D:  $(0; 2)$  C  D

---

8. Ak  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) sú korene kvadratickej rovnice  $x^2 + 4x - 12 = 0$ , tak číslo  $2x_1 - x_2$  je: A  B   
A:  $-14$  B:  $-10$  C:  $-2$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

9. Rovnica  $\log_3(2x + 5) = 4$  má v množine reálnych čísel jediné riešenie, ktoré je z intervalu: A  B   
A:  $(-\infty; 2)$  B:  $\langle 2; 5)$  C:  $\langle 5; 38)$  D:  $\langle 38; \infty)$  C  D

---

10. Rovnice  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -1 + 5t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sú rovnicami: A  B   
A: úsečky B: polpriamky C: priamky D: roviny C  D

---

11. Rovnica dotyčnice k parabole  $x^2 + 20y = 0$  v bode  $[10; -5]$  je: A  B   
A:  $x - y - 15 = 0$  B:  $x + y - 5 = 0$  C:  $2x + y - 15 = 0$  D: všetky ostatné odpovede sú nesprávne C  D

---

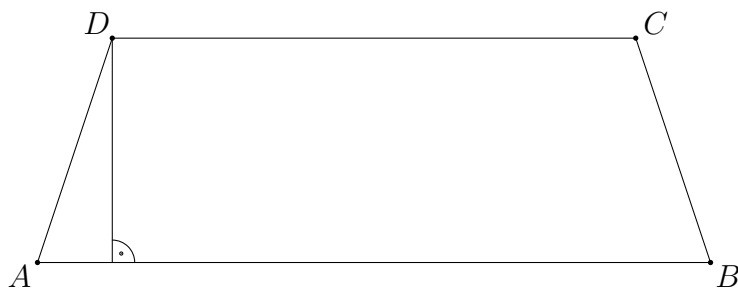
12. Podmienky  $\sin x > 0$  a  $\cos x > 0$  pre  $0 \leq x \leq 2\pi$  sú ekvivalentné s podmienkou: A  B   
A:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  B:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  C:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  D:  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  C  D

---

13. Prvé dva členy klesajúcej geometrickej postupnosti sú z množiny  $\{12; 24\}$ . Prvých päť členov tejto postupnosti je: A  B   
A:  $24; 12; 6; 3; 1$  B:  $12; 24; 36; 48; 60$  C:  $24; 12; 6; 3; 1,5$  D:  $24; 12; 0; -12; -24$  C  D

---

14. Obvod rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  s dĺžkami strán  $|AB| = 9$  cm,  $|CD| = 7$  cm a s výškou 3 cm je (v cm) rovný: A  B   
C  D



A:  $2(4 + \sqrt{10})$  B:  $2(8 + \sqrt{10})$  C:  $2(12 + \sqrt{10})$  D:  $2(16 + \sqrt{10})$

---

15. Firma dosiahla za kalendárny rok zisk 51 000 €. Zo zisku odvieďa dvadsaťpercentnú daň. Zo zvyšku polovicu investovala na svoj rozvoj. Koľko eur firma investovala na svoj rozvoj? A  B   
C  D   
A: 25 400 B: 25 500 C: 10 200 D: 20 400

## Použitá literatúra

- [1] E. Bálint – J. Bobek – M. Križalkovičová – J. Lukátšová: *Zbierka úloh z matematiky na prijímacie skúšky na stredné školy*, SPN Bratislava, 1984, 67-325-84.
- [2] Š. Berežný – V. Mislivcová: *Prehľad základov z matematiky pre záujemcov o štúdium na Leteckej fakulte Technickej univerzity v Košiciach*, 4. preprac. vyd., TU Košice, 2010, 72 s., ISBN 978-80-553-0465-6.
- [3] J. Buša – Š. Schrötter: *Stredoškolská matematika pre študentov a uchádzačov o štúdium na FEI TU v Košiciach*, FEI TU Košice, 2010, 125 s., ISBN 978-80-553-0477-9.
- [4] O. Hudec – Z. Kimáková – E. Švidroňová: *Príklady z matematiky pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach*, EkF TU Košice, 2003, 106 s., ISBN 80-8073-049-0 (dá sa stiahnuť zo stránky <http://www.ekf.tuke.sk/index.php?id=exam>).
- [5] B. Kamenská – D. Zacharová – I. Zachar: *Testy 2008 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2007, ISBN 978-80-89160-51-8.
- [6] D. Knežo – C. Hospodár – Z. Kimáková – E. Švidroňová: *Zbierka príkladov pre uchádzačov o štúdium na Strojníckej fakulte TU*, ELFA s.r.o, Košice, 2000, 51 s., ISBN 80-7099-506-8.
- [7] *Testy 2004 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2003, ISBN 80-85456-04-4.
- [8] *Testy 2003 – Matematika*, Pedagogické vydavateľstvo DIDAKTIS, s.r.o., 2002, ISBN 80-85456-83-4.

AUTORI: Martin Bača, Ján Buša, Andrea Feňovčíková, Zuzana Kimáková,  
Denisa Oleksáková, Štefan Schrötter

NÁZOV: Zbierka riešených a neriešených úloh z matematiky pre uchádzačov  
o štúdium na TU v Košiciach

VYDAVATEL: Technická univerzita v Košiciach

POČET STRÁN: 2<sup>7</sup>

VYDANIE: prvé

FORMA: online

DÁTUM VYDANIA: 11. 11. 11

SADZBA: programom pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X